

И. М. Глазман

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ
КАЧЕСТВЕННОГО
СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА
СИНГУЛЯРНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ



И. М. ГЛАЗМАН

ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ
КАЧЕСТВЕННОГО
СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА
СИНГУЛЯРНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
ОПЕРАТОРОВ



ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1963

517. 2

Г 52

УДК 517.43

АННОТАЦИЯ

Монография посвящена изложению основ и развитию применений прямых методов исследования природы спектра сингулярных дифференциальных операторов. В ней отражена соответствующая журнальная литература за последние 10 — 15 лет. Среди рассматриваемых операторов центральное место занимает оператор Шредингера.

Книга может представить интерес не только для математика, но и для физика-теоретика. Она вполне доступна для студентов старших курсов и аспирантов, желающих ознакомиться с качественной спектральной теорией дифференциальных уравнений.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	7
Введение	9
 Г л а в а I. Метод расщепления и общие теоремы о спектре	17
§ 1. Замкнутые линейные операторы и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве	17
1. Классификация точек спектра замкнутого линейного оператора	17
2. Спектры расширений и расщепление замкнутых линейных операторов	23
3. Спектр самосопряженного оператора и пробные многообразия	24
4. Относительная полная непрерывность симметрических операторов	33
5. Обобщения теоремы Г. Вейля о вполне непрерывных возмущениях	40
6. О квадрате замкнутого симметрического оператора с конечным индексом дефекта	45
§ 2. Одномерные самосопряженные дифференциальные операторы	49
7. Расщепление операторов и свойства спектра, не зависящие от поведения коэффициентов на конечном расстоянии	49
8. Малые и относительно малые возмущения дифференциальных операций	52
9. Пробные системы финитных функций и непрерывная часть спектра сингулярного оператора как множество точек накопления спектров регулярных операторов	56
10. Квадратичный функционал и общие критерии дискретности отрицательной части спектра	60
11. Принципы локализации	64
12. Отрицательная часть спектра и осцилляторные свойства дифференциальных операций	68
1*	3

13. О дифференциальных операциях над вектор-функциями . .	73
14. Конечноразностный аналог одномерного самосопряженного сингулярного дифференциального оператора	75
§ 3. Многомерные самосопряженные дифференциальные опе- раторы	78
15. Включение многомерных краевых задач в общую теорию симметрических операторов	78
16. Об индексе дефекта дифференциальных операторов в част- ных производных	89
17. Расщепление в многомерных областях	96
18. Малые и относительно малые возмущения в многомерном случае	103
19. Отрицательная часть спектра и квадратичный функционал	
20. Пространства С. Л. Соболева и принцип расщепления . .	105
§ 4. J -самосопряженные операторы	118
21. Область значений квадратичного функционала и внешнее поле регулярности линейного оператора	118
22. J -симметрические операторы и их J -самосопряженные рас- ширения	121
23. Некоторые спектральные свойства J -самосопряженных рас- ширений J -симметрических операторов с конечным де- фектным числом	123
24. J -симметрические дифференциальные операторы	126
Г л а в а II. Спектр одномерных двучленных дифферен- циальных операторов	
	130
25. Двучленные дифференциальные операции	130
26. Некоторые вспомогательные неравенства	131
27. Признаки ограниченности и дискретности отрицательной части спектра	134
28. Признаки полуограниченности и дискретности всего спектра	140
29. Критерий дискретности спектра для случая полярной диф- ференциальной операции	145
30. Признаки неосцилляторности и осцилляторности	149
31. Положительная часть непрерывного спектра	164
32. Спектральная альтернатива для полуограниченных опера- торов Шредингера	174
33. Случай, когда спектр оператора Шредингера покрывает всю ось	177
34. Примеры исследования характера спектра в случае одно- членной операции	181
35. О спектре оператора Шредингера с комплекснозначной потенциальной энергией	186
36. Спектр двучленных дифференциальных операторов над вектор-функциями	190
37. Дискретный аналог осцилляционных теорем	192

Глава III. Спектр одномерных дифференциальных операторов общего вида	197
38. Одномерные дифференциальные операции общего вида	197
39. Признаки полуограниченности спектра	198
40. Области неосцилляторности и осцилляторности	201
41. О лакунах в непрерывной части спектра	204
42. Признаки непрерывности положительной части спектра	207
43. Теорема М. Ш. Бирмана	210
44. Теорема М. Г. Крейна о мультипликативной структуре положительных дифференциальных операторов	213
 Глава IV. Спектр многомерных дифференциальных операторов	 221
45. Многомерные дифференциальные операции	221
46. Теоремы о дискретной части спектра	222
47. О признаках полуограниченности и дискретности спектра многомерных краевых задач	230
48. Отрицательная часть спектра и узловые линии решений эллиптических уравнений	235
49. Характер непрерывной части спектра в зависимости от поведения потенциала и вида бесконечной области	241
50. О дискретной части спектра оператора Лапласа в предельно-цилиндрических областях	252
 Глава V. Характер спектра дифференциального оператора Шредингера и поведение решений соответствующего однородного уравнения	 264
51. Постановка задачи	264
52. Некоторые априорные оценки для решений однородного эллиптического уравнения	265
53. Поведение решений в точках дискретной части спектра	269
54. Оценка расстояния точки от спектра по поведению решения в этой точке	272
55. Поведение решений в точках непрерывной части спектра	276
56. Спектр дифференциального оператора Хилла	281
57. Теорема Хартмана — Патнама о лакунах в спектре операторов с ограниченным потенциалом	287
58. О проблеме В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов и ее континуальном аналоге	293
 Глава VI. Некоторые дополнительные вопросы качественного спектрального анализа	 298
59. Различные обобщения критерия А. М. Молчанова	298
60. Об отрицательной части спектра многомерных двучленных операторов высших порядков	301

61. Алгебраическое исследование спектра оператора энергии гармонического осциллятора	302
62. Оператор Дирака	306
63. Оператор Паули	309
64. О спектре оператора энергии системы многих частиц . .	312
65. О структуре непрерывной части спектра оператора Шре- дингера	315
66. Комплексные потенциалы	319
67. Модель кристаллической решетки	322
Цитированная литература	327
Алфавитный указатель	338

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга эта посвящена в основном исследованию характера спектра сингулярных дифференциальных операторов в зависимости от поведения коэффициентов соответствующей дифференциальной операции. Сингулярность рассматриваемых при этом краевых задач состоит в неограниченности области изменения независимых переменных или в том, что коэффициенты дифференциальной операции имеют особенности на границе этой области.

Хотя в книге и приводится много различных признаков того либо иного расположения частей спектра, она все же не предназначается для использования в качестве сборника готовых признаков. Ее цель скорее состоит в том, чтобы дать средства для получения признаков такого рода. Эти средства, основанные на общих предложениях теории операторов, названы здесь прямыми методами качественного спектрального анализа, и их применение иллюстрируется многочисленными примерами. Многие из них связаны с задачами, которые обязаны своим возникновением квантовой механике.

В первоначальном варианте книга была написана исключительно на основе статей автора [31], но в настоящем своем виде она содержит многие результаты других авторов, полученные в последние годы. Из них наиболее значительное место в книге занимает изложение ряда результатов М. Ш. Бирмана по исследованию природы спектра.

Обстоятельная характеристика содержания книги в целом и по главам дана во введении.

Автор выражает свою глубокую благодарность Н. И. Ахиезеру, М. Ш. Бирману и Ю. И. Любичу, общение с которыми в свое время стимулировало его работу над вопросами, составившими основу этой книги. Их указания немало способствовали улучшению отдельных мест книги. Считаю своим приятным долгом также поблагодарить Б. М. Левитана и В. А. Марченко за некоторые критические замечания. Выражаю свою признательность А. А. Егорову и М. Н. Зайда за внимание и помощь, оказанную при подготовке рукописи к изданию.

И. М. Глазман

ВВЕДЕНИЕ

Основы теории сингулярных дифференциальных операторов были заложены Германом Вейлем в его известной статье «Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen» в 1910 г. [20(2)]. Уже в этой классической работе наряду с основным результатом о разложении по решениям сингулярной задачи Штурма — Лиувилля имеются отдельные теоремы о природе спектра. Эти теоремы вошли как первоначальные результаты в накопившиеся к настоящему времени исследования, которые можно объединить под общим названием качественного спектрального анализа.

Качественный спектральный анализ или исследование природы спектра состоит в изучении множества точек спектра в зависимости от поведения коэффициентов дифференциальной операции, вида области и характера краевых условий.

После упомянутого фундаментального исследования Г. Вейля на протяжении пятнадцати лет почти не появлялось работ, связанных с сингулярными краевыми задачами. Своим дальнейшим прогрессом теория сингулярных дифференциальных операторов обязана Э. Шредингеру, опубликовавшему в 1926 г. две краткие заметки «Quantisierung als Eigenwertproblem» [109]. Уже в первом из этих сообщений, заложивших математический фундамент квантовой механики, Шредингер получает стационарное уравнение для электрона, известное под его именем.

Задачи на определение энергетического спектра конкретных систем, изученные после этого в различных работах по квантовой механике, явились решающими для дальнейшего развития теории сингулярных дифференциальных операторов и, в частности, качественного спектрального анализа.

Под влиянием успехов квантовой механики в сороковых годах, и главным образом в первые послевоенные годы, в периодической математической литературе, преимущественно за рубежом, систематически появляются работы по качественному спектральному анализу. Много различных результатов по исследованию спектра одномерного оператора Шредингера было получено на протяжении 1946—1952 гг. А. Винтнером, П. Хартманом и К. Патнамом.

Таким образом, за 40 лет, прошедших после опубликования фундаментальной статьи Г. Вейля, усилиями многих авторов был накоплен значительный материал по качественному спектральному анализу сингулярных дифференциальных операторов. Однако этот материал не содержал результатов, относящихся к дифференциальным уравнениям высших порядков, и почти не касался (за исключением статей К. Фридрикса и Ф. Реллиха) многомерных сингулярных краевых задач.

Дальнейший прогресс в рассматриваемой области математического анализа был достигнут в значительной мере благодаря работам советских математиков. Начиная с 1950 г., в отечественной литературе публикуются исследования по качественному спектральному анализу дифференциальных операторов высших порядков и по систематическому изучению природы спектра многомерных сингулярных краевых задач.

При этом в методическом отношении здесь определились два направления — аналитическое и теоретико-операторное. По существу, эти направления обозначились еще ранее при решении классической проблемы Штурма — Лиувилля на конечном интервале, где они в определенной мере соответствуют асимптотическому методу Лиувилля и вариационному методу Куранта.

Аналитическое направление, входя в сферу классического анализа, опирается на асимптотические методы и аппарат теории аналитических функций. Аналитическим методам в теории сингулярных дифференциальных операторов второго порядка посвящены двухтомная монография Е. Ч. Титчмарша ([95(2)], 1960; первое издание — 1946, 1958) и известная книга Б. М. Левитана ([61(1)], 1950). Из результатов относительно природы спектра дифференциальных операторов высших порядков, достигнутых аналитическим путем, следует отметить теоремы И. М. Рапопорта ([82(1)], 1951), вошедшие в его монографию ([82(2)], 1954), и некоторые результаты М. А. Наймарка (см. [72(3)], 1954).

Теоретико-операторные методы по своему характеру в некотором смысле близки к прямым методам математической физики, и поэтому их можно назвать прямыми методами качественного спектрального анализа.

Основу прямых методов исследования природы спектра составляют метод расщепления и метод сравнения квадратичных форм. Эти методы опираются на общие теоремы теории расширений и спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве, а также на известную теорему Г. Вейля о вполне непрерывных возмущениях. К прямым методам качественного спектрального анализа сингулярных краевых задач относится, в частности, мини-максимальный принцип Р. Куранта, применявшийся в случае неограниченных областей Р. Курантом ([54], 1931), Ф. Реллихом ([83(4)], 1948) и Д. Джонсом ([40], 1953). Развитие теоретико-операторных методов исследования природы спектра сингулярных дифференциальных операторов было подготовлено работами Р. Куранта, К. Фридрихса и Ф. Реллиха.

Объектом исследования в настоящей книге является спектр $S(L)$ сингулярных операторов, порождаемых различными дифференциальными операциями. Сингулярность оператора L может вызываться особенностями коэффициентов на конечном расстоянии или бесконечностью области изменения независимых переменных. Так, для операции Шредингера в случае одного электрона особыми являются точка расположения ядра и бесконечно удаленная точка. Для операции Трикоми в ограниченной области полуплоскости $y \geq 0$ особые точки заполняют ту часть оси $y = 0$, которая принадлежит границе этой области. В квантовомеханической задаче многих частиц многообразия особых точек простираются в бесконечность.

Стремление найти общую основу для исследования природы спектра одномерных сингулярных дифференциальных операторов любого порядка, многомерных сингулярных краевых задач и конечноразностных операторов привело к разработке теоретико-операторных методов качественного спектрального анализа и, в частности, метода расщепления (см. [31(1)], 1950). Этот метод позволил при исследовании определенных свойств спектра игнорировать поведение коэффициентов дифференциальных операторов вне окрестностей особых точек, а также выяснить влияние, оказываемое на спектр отдельными особыми точками или границами. Поэтому метод расщепления в определенном смысле является способом локализации особенностей.

Основой метода расщепления является принцип расщепления, который в применении к простейшей одномерной операции

$$-y'' + q(x)y \quad (L)$$

с одной особой точкой в бесконечности состоит в следующем [31 (1)]. Пусть L есть самосопряженный оператор, порождаемый в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ операцией (L) вместе с некоторыми граничными условиями. Подчиним функции из области определения $\mathfrak{D}_L$ оператора L при данном $\gamma > 0$ дополнительным условиям $y(\gamma) = y'(\gamma) = 0$. Тогда оператор L_0 , индуцированный естественным образом оператором L на образовавшемся многообразии $\mathfrak{D}_{L_0} \subset \mathfrak{D}_L$, распадается в ортогональную сумму $L_0 = L_1 \oplus L_\gamma$ некоторых симметрических операторов в $\mathcal{L}_2(0, \gamma)$ и $\mathcal{L}_2(\gamma, \infty)$. Расширяя эти операторы до самосопряженных, определим оператор $M = \tilde{L}_1 \oplus \tilde{L}_\gamma$.

Теперь данный оператор L и построенный оператор M оказываются различными самосопряженными расширениями одного и того же «расщепленного» оператора L_0 . Так как эти расширения конечномерны и оператор $\tilde{L}_1$ регулярен, то естественно ожидать, что определенные свойства спектра, вызванные сингулярностью задачи, должны сохраняться при переходе от L к $\tilde{L}_\gamma$.

К таким свойствам относятся принадлежность данной точки λ к непрерывной части $C(L)$ спектра оператора L , сгущение спектра к точке $\lambda = -\infty$ и наличие бесконечного множества точек спектра в любой односторонней окрестности данной точки λ . Сохранение первых двух свойств можно записать в виде соотношения

$$C(L) = C(\tilde{L}_\gamma), \quad (C)$$

если условиться относить точку $\lambda = -\infty$ к $C(L)$ всякий раз, когда она является предельной точкой спектра $S(L)$ оператора L . Сохранение последнего свойства можно представить в виде соотношения

$$S'(L) = S'(\tilde{L}_\gamma), \quad (S')$$

если через S' обозначить множество всех правых предельных точек спектра S' .

Соотношение (C) выражает упомянутый выше принцип расщепления, который переносится и на многомерный случай ([31 (5)], 1954), хотя в этом последнем случае оператор L

оказывается уже бесконечномерным расширением расщепленного оператора L_0 .

В дополнение к соотношениям (C) и (S') при исследовании характера спектра прямыми методами систематически используются пробные многообразия финитных функций ([31 (2)], 1951). Эти многообразия используются в связи с вытекающей из спектрального разложения теоремой, в силу которой число точек спектра самосопряженного оператора A , расположенных между $\lambda_0 - \delta$ и $\lambda_0 + \delta$, или левее λ_0 , равно максимальной размерности линейных многообразий, лежащих в $\mathfrak{D}_L$, на которых выполнено неравенство $\|Af - \lambda_0 f\| < \delta \|f\|$, или соответственно $(Af, f) < \lambda_0(f, f)$.

Из этой теоремы, в частности, вытекает, что непрерывный спектр $C(A + B)$ суммы самосопряженных операторов лежит в $\|B\|$ -окрестности непрерывного спектра $C(A)$. При дополнительном предположении об односторонности возмущения, когда, например, $B > 0$, непрерывный спектр $C(A + B)$ будет находиться в правой $\|B\|$ -окрестности $C(A)$.

Использование соотношений (C), (S') и пробных многообразий, являющихся линейными оболочками бесконечной последовательности финитных функций с уходящими в бесконечность непересекающимися носителями, и составляет метод расщепления. Очевидно, метод расщепления позволяет при изучении сингулярных свойств спектра исключать значения коэффициентов дифференциальных операторов на конечном расстоянии и выявить влияние на спектр того или иного их поведения в бесконечности. При этом в известной мере становятся несущественными как порядок дифференциальной операции, так и число независимых переменных.

С помощью метода расщепления были получены многочисленные результаты относительно природы спектра одномерных дифференциальных операторов высших порядков и многомерных сингулярных краевых задач, многие из которых уже для случая простейшей операции (L) оказались новыми по отношению к результатам, полученным ранее аналитическим путем. В частности, метод расщепления позволил обнаружить ряд признаков неосцилляторности и осцилляторности для дифференциальных операций не только второго, но и высших порядков. Изучение этого вопроса основано на исследовании знака квадратичного функционала (Lu, u) .

В 1952 г. А. М. Молчанов нашел критерий дискретности спектра оператора Шредингера с ограниченным снизу потенциалом [70]. Этот критерий был получен на основе одной

общей леммы Ф. Реллиха ([83(1)], 1942), которая сводит задачу нахождения критерия дискретности спектра оператора L к вопросу об условиях полной непрерывности оператора вложения из пространства с метрикой (Lu, u) в пространство с метрикой (u, u) .

Результат А. М. Молчанова сразу обратил на себя внимание своей законченностью. Это был первый необходимый и достаточный признак в качественном спектральном анализе. Однако не сразу было замечено, что не только вопрос о дискретности спектра, но и ряд других вопросов исследования природы спектра связан с полной непрерывностью определенных операторов вложения.

Эта связь была обнаружена М. Ш. Бирманом, который в 1958 г. получил на этой основе ряд результатов, существенно продвинувших качественную спектральную теорию сингулярных дифференциальных операторов [13(5)]. При этом М. Ш. Бирман следовал пути, связанному с тем подходом к задачам качественного спектрального анализа, который параллельно методу расщепления развивался им для полуограниченных краевых задач.

Метод М. Ш. Бирмана есть метод сравнения квадратичных форм. Он опирается на теорию К. Фридрихса полуограниченных операторов в гильбертовом пространстве H и существенно развивает методы, намеченные этим автором в его фундаментальном исследовании [97(1)], опубликованном еще в 1934 г. Важную роль в применении метода сравнения квадратичных форм играет обобщение М. Ш. Бирмана теоремы Г. Вейля об инвариантности непрерывной части спектра при вполне непрерывных возмущениях на случай возмущений, вполне непрерывных лишь относительно. При этом, если A есть некоторый положительно определенный (возможно, незамкнутый) оператор в H , а K — некоторый симметрический в H оператор с областью определения $\mathfrak{D}_K \subset \mathfrak{D}_A$, то оператор K называется вполне непрерывным относительно A , когда оператор $A^{\circ-1}K$, где A° — расширение Фридрихса оператора A , вполне непрерывен в метрике (Af, f) . В случае, когда $K > 0$, относительно полная непрерывность эквивалентна полной непрерывности формы (Kf, f) относительно формы (Af, f) .

Метод сравнения квадратичных форм, как и метод расщепления, в определенных границах применим также к исследованию спектра несимметрических задач.

Основу книги составляет наибольшая по объему первая глава. Первый параграф этой главы может служить мостом, по которому читатель, знакомый с общей теорией операторов (см., например, [7]), легко перейдет в более специальную область, являющуюся предметом настоящего исследования. В дальнейших двух параграфах дается описание и обоснование принципа расщепления. Здесь же приводятся применения метода расщепления для дифференциальных операторов, а также метода сравнения квадратичных форм к получению условных результатов. Так называются предложения, указывающие, какие изменения должны или, напротив, не могут произойти в спектре при определенном способе изменения коэффициентов или граничных условий.

Таким образом, в отличие от последующих глав, в главе I на поведение коэффициентов дифференциальных операций в бесконечности не накладывается каких-либо специальных ограничений. В частности, в п° 12 выясняется связь между спектром и осцилляторностью. При первом чтении можно опустить п° п° 6, 13, 14, 20 первой главы и весь последний параграф этой главы, посвященный несимметрическим задачам.

Глава вторая посвящена применению изложенных в первой главе методов к получению безусловных результатов о спектре одномерного двучленного дифференциального оператора $2n$ -го порядка, который при $n = 1$ имеет вид (L) . К безусловным результатам относятся утверждения о каких-либо свойствах спектра при заданном поведении коэффициентов дифференциальных операций в бесконечности.

Третья и четвертая главы посвящены в основном перенесению результатов второй главы на одномерные дифференциальные операторы общего вида и на многомерные краевые задачи.

Глава пятая посвящена главным образом исследованию связи между расположением точки λ относительно спектра оператора Шредингера и поведением решений соответствующего однородного уравнения в бесконечности. В этой главе изучаются также лакунарные спектры. По существу, пятая глава связывает качественный спектральный анализ с некоторыми вопросами качественной теории дифференциальных уравнений.

Она также указывает основу для связи между прямыми и аналитическими методами качественного спектрального анализа.

Последняя, шестая глава посвящена различным дополнительным и более специальным вопросам, не включенным в основной текст.

В каждой главе принята автономная нумерация теорем и формул, а внутри первой главы автономная нумерация формул применяется в каждом параграфе.

Список цитированной литературы дан в алфавитном порядке по авторам с внутренней нумерацией работ каждого автора.

Алфавитный указатель терминов и обозначений возвращает читателя к тем местам текста, где эти термины или обозначения были определены.

ГЛАВА I

МЕТОД РАСЩЕПЛЕНИЯ И ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ О СПЕКТРЕ

§ 1. Замкнутые линейные операторы и самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве

1. Классификация точек спектра замкнутого линейного оператора. Ввиду отсутствия общепринятой терминологии начнем с определения основных понятий, относящихся к качественному спектральному анализу. Бóльшую часть этих определений можно найти в [7].

Пусть T есть замкнутый линейный оператор с областью определения $\mathfrak{D}_T$, плотной в гильбертовом пространстве H .

Комплексное число λ называется *точкой регулярного типа* оператора T , если для всех $f \in \mathfrak{D}_T$ выполнено неравенство

$$\|(T - \lambda I) f\| > k_\lambda \|f\|, \quad (1)$$

где число k_λ положительно и не зависит от f .

Из (1) следует, что точки регулярного типа образуют некоторое открытое множество [7]. Это множество $\Pi(T)$ называется *полем регулярности* оператора T . Из замкнутости оператора T и неравенства (1) следует, что для любой точки $\lambda \in \Pi(T)$ многообразие $(T - \lambda I) \mathfrak{D}_T$ замкнуто, то есть является подпространством.

Если при данном λ из $\Pi(T)$ имеет место равенство $(T - \lambda I) \mathfrak{D}_T = H$, то λ называется *точкой регулярности* оператора T . Совокупность всех точек регулярности оператора T называется его *резольвентным множеством*. Это множество также открыто [7].

Дополнение $S(T)$ резольвентного множества до всей комплексной плоскости называется *спектром* оператора T .

Спектр замкнутого линейного оператора есть замкнутое множество.

Дискретным спектром (или *дискретной частью спектра*) оператора T называется множество $D(T)$ его собственных значений. Множество всех собственных векторов, соответствующих данному значению $\lambda \in D(T)$, является подпространством. Оно называется *собственным подпространством*, а его размерность — *кратностью* данного собственного значения.

При определении числа точек множества $D(T)$, лежащих в данной области, каждое собственное значение считается столько раз, какова его кратность.

Если для некоторого элемента $f \neq 0$ из $\mathfrak{D}_T$ при некотором натуральном s имеет место равенство

$$(T - \lambda I)^s f = 0, \quad (2)$$

то, очевидно, существует наименьший показатель степени $s = \sigma$, при котором еще выполняется (2). Но тогда

$$g = (T - \lambda I)^{\sigma-1} f \neq 0, \quad Tg - \lambda g = 0,$$

так что $\lambda \in D(T)$.

Линейное множество всех векторов $f \in \mathfrak{D}_T$, удовлетворяющих при данном $\lambda \in D(T)$ и некотором натуральном $s = s_f$ уравнению (2), назовем *корневым многообразием* [36]. Замкнутое корневое многообразие будем называть *корневым подпространством*. Очевидно, корневое подпространство инвариантно относительно оператора T .

Размерность корневого многообразия, соответствующего данному значению $\lambda \in D(T)$, будем называть *рангом* собственного значения λ . Так как собственное подпространство есть часть корневого многообразия, то кратность каждого собственного значения не превосходит его ранга.

Корневое подпространство G называется *отделимым*, если существует инвариантное относительно оператора T подпространство F , в котором он непрерывно обратим и которое в прямой сумме с G дает все пространство H .

Непрерывным спектром (или *непрерывной частью спектра*) оператора T называется множество $C(T)$ значений λ , для которых существует ограниченная некомпактная последовательность $\{f_n\} \in \mathfrak{D}_T$, удовлетворяющая условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda I) f_n = 0. \quad (3)$$

Любую часть такой последовательности, из которой нельзя выделить сходящейся подпоследовательности, назовем *характеристической* для данного значения $\lambda \in C(T)$.

Множество $C(T)$ также называют *предельным спектром* или *спектром сгущения* оператора T ; при этом непрерывным спектром называют часть множества $C(T)$, остающуюся после удаления из него собственных значений оператора T . Ниже будет показано, что множество $C(T)$ замкнуто.

Остаточным спектром (или *остаточной частью спектра*) оператора T называется множество $O(T)$ значений λ , для которых замыкание многообразия $(T - \lambda I) \mathfrak{D}_T$ не совпадает с H и которые не принадлежат $D(T)$. Таким образом, остаточный спектр $O(T)$ есть множество всех тех точек из $D(T^*)$, которые не принадлежат $D(T)$.

Очевидно, каждое из множеств $D(T)$, $C(T)$ и $O(T)$ принадлежит спектру $S(T)$ оператора T . Покажем, что, обратно, каждая точка множества $S(T)$ принадлежит по крайней мере одному из множеств $D(T)$, $C(T)$ или $O(T)$.

Пусть $\lambda \in S(T)$. Если $\lambda \in \Pi(T)$, то $\lambda \in O(T)$. Если же $\lambda \notin \Pi(T)$, то, согласно (1), существует *нормированная последовательность* $\{f_n\} \subset \mathfrak{D}_T$ (то есть последовательность, нормированная условием $\|f_n\| = 1$ при $n = 1, 2, \dots$) такая, что имеет место (3). Если из этой последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность $f_{n_k} \rightarrow f$, то из (3) следует, что элемент f принадлежит $\mathfrak{D}_T$, является собственным вектором оператора T и $\lambda \in D(T)$. Если же последовательность $\{f_n\}$ не допускает выделения сходящейся части, то она некомпактна, и, следовательно, $\lambda \in C(T)$.

Таким образом, спектр $S(T)$ оператора T есть теоретико-множественная сумма дискретной, непрерывной и остаточной части спектра

$$S(T) = D(T) \cup C(T) \cup O(T).$$

При этом слагаемые в правой части последнего равенства могут пересекаться. В частности, собственные значения бесконечной кратности всегда принадлежат непрерывной части спектра.

Отметим, что непрерывная часть спектра не обязательно является совершенным множеством, а дискретная — изолированным множеством. Так, например, непрерывная часть спектра любого вполне непрерывного оператора состоит из одной точки $\lambda = 0$, а остаточная часть спектра любого

симметрического, но не самосопряженного оператора A с равными дефектными числами содержит верхнюю и нижнюю λ -полуплоскости, которые одновременно входят в состав дискретной части спектра сопряженного оператора A^* .

В дальнейшем знаками $\oplus$ и $\ominus$ будут обозначаться ортогональная сумма и соответственно ортогональное дополнение линейных многообразий пространства H . Для обозначения прямой суммы будет служить знак $\dot{+}$.

Теорема 1. *Непрерывный спектр $C(T)$ замкнутого линейного оператора есть замкнутое множество.*

Доказательство. Достаточно установить, что дополнение $C(T)$ до всей плоскости открыто.

Пусть $\lambda_0 \notin C(T)$. Если $\lambda_0 \in \Pi(T)$, то некоторая окрестность точки λ_0 также принадлежит $\Pi(T)$ и, следовательно, не пересекается с $C(T)$. Если же $\lambda_0 \notin \Pi(T)$, то число λ_0 является собственным значением оператора T конечной кратности. Пусть тогда G есть собственное подпространство, соответствующее значению $\lambda_0 \in D(T)$, а F' есть пересечение $\mathfrak{D}_T$ с $H \ominus G$, так что

$$\mathfrak{D}_T = F' \oplus G.$$

Многообразие F' плотно в $H \ominus G$ (см. далее п° 6).

На линейном многообразии F' при некотором $k_{\lambda_0} > 0$ выполняется неравенство

$$\|(T - \lambda_0 I) \varphi\| > k_{\lambda_0} \|\varphi\| \quad (\varphi \in F'), \quad (4)$$

ибо в противном случае существовала бы нормированная последовательность $\{\varphi_n\} \subset F'$, для которой было бы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T - \lambda_0 I) \varphi_n = 0.$$

Но, так как $\lambda_0 \notin C(T)$, то последовательность $\{\varphi_n\}$ была бы компактна и поэтому для некоторой подпоследовательности существовал бы

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k} = \varphi.$$

Элемент φ являлся бы собственным вектором оператора T , соответствующим собственному значению λ_0 , и при этом было бы $\varphi \perp G$, что противоречит определению G .

Из неравенства (4) для всех λ из некоторой окрестности точки λ_0 вытекает неравенство

$$\|(T - \lambda I)\varphi\| > \frac{1}{2} k_{\lambda_0} \|\varphi\| \quad (\varphi \in F'), \quad (5)$$

из которого следует, что $\lambda \notin C(T)$.

Действительно, предположив противное, найдем некомпактную нормированную последовательность $\{f_n\} \in \mathfrak{D}_T$, для которой имеет место предельное соотношение (3).

Обозначая через φ_n и g_n составляющие вектора f_n в F' и G соответственно, имеем

$$\begin{aligned} \|(T - \lambda I)\varphi_n\| &= \|(T - \lambda I)f_n - (T - \lambda I)g_n\| = \\ &= \|(T - \lambda I)f_n + (\lambda - \lambda_0)g_n\| \leq \|(T - \lambda I)f_n\| + |\lambda - \lambda_0| \|g_n\|. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как, далее, последовательность $\{f_n\}$ некомпактна, а $\dim G < \infty$, то для некоторого $\delta > 0$ и некоторой последовательности номеров $n_k \rightarrow \infty$ будет $\|\varphi_{n_k}\| > \delta$, и из (6) при λ , достаточно близких к λ_0 , будет следовать соотношение

$$\|(T - \lambda I)\varphi_{n_k}\| < \frac{1}{2} k_{\lambda_0} \delta,$$

противоречащее неравенству (5). Теорема доказана.

Пусть теперь $\lambda \in D(T)$ и G — соответствующее собственное подпространство, а F' есть пересечение ортогонального дополнения к G с $\mathfrak{D}_T$. Сужение T на F' обозначим через T' (см. [7]) и при $\lambda \notin D(T)$ условимся считать $T' = T$. Очевидно, при любом значении λ имеет место равенство

$$(T - \lambda I)\mathfrak{D}_T = (T' - \lambda I)F' \quad (7)$$

и существует оператор $(T' - \lambda I)^{-1}$.

Теорема 2. Если $\lambda \notin C(T)$, то оператор $(T' - \lambda I)^{-1}$ ограничен. Обратно, если оператор $(T' - \lambda I)^{-1}$ ограничен и λ не является собственным значением бесконечной кратности, то $\lambda \notin C(T)$.

Доказательство. Если $\lambda \notin C(T)$, то ограниченность оператора $(T' - \lambda I)^{-1}$ следует из неравенства (4). Если же оператор $(T' - \lambda I)^{-1}$ ограничен и $\dim G < \infty$, то, так же как и при доказательстве теоремы 1, получим, что $\lambda \notin C(T)$.

Теорема 3. Если $\lambda \notin C(T)$, то многообразие $(T - \lambda I)\mathfrak{D}_T$ замкнуто. Обратно, если это многообразие замкнуто

и точка λ не является собственным значением бесконечной кратности, то $\lambda \notin C(T)$.

Доказательство. Первая часть теоремы вытекает из ограниченности оператора $(T' - \lambda I)^{-1}$, замкнутости T и равенства (7).

Переходя ко второй части теоремы, установим ограниченность оператора $R' = (T' - \lambda I)^{-1}$. С этой целью продолжим линейно на все пространство H замкнутый оператор R' с областью определения $\Delta = (T - \lambda I) \mathfrak{D}_T$, полагая R' равным нулю на ортогональном дополнении к Δ . Полученный оператор R , будучи замкнутым линейным оператором, определенным на всем пространстве, по теореме С. Банаха [9] является ограниченным, откуда следует ограниченность оператора R' .

Из определений этого пункта непосредственно следует, что каждая компонента спектра ортогональной суммы $T_1 \oplus T_2$ операторов T_1 и T_2 равна теоретико-множественной сумме соответствующих компонент спектра этих операторов

$$D(T_1 \oplus T_2) = D(T_1) \cup D(T_2),$$

$$C(T_1 \oplus T_2) = C(T_1) \cup C(T_2),$$

$$O(T_1 \oplus T_2) = O(T_1) \cup O(T_2)$$

и, следовательно, также

$$S(T_1 \oplus T_2) = S(T_1) \cup S(T_2).$$

В некоторых специальных вопросах (см. п° 65) приходится в непрерывном спектре $C(A)$ самосопряженного оператора A выделять так называемую абсолютно непрерывную часть спектра, которая определяется следующим образом [55].

Множество элементов $g \in H$, для которых неубывающая функция $(E_\lambda g, g)$ абсолютно непрерывна, образует некоторое подпространство $H_C(A)$, инвариантное относительно A [80]. Часть A_C оператора A , действующая в $H_C(A)$, называется *абсолютно непрерывной частью оператора A* , а спектр $S(A_C)$ этого оператора A_C называется *абсолютно непрерывной частью спектра оператора A* . Очевидно, $S(A_C) \subset C(A)$. Отметим, что подпространство $H_D(A) = H \ominus H_C(A)$ состоит из всех тех элементов $g \in H$, для которых функция $(E_\lambda g, g)$ сингулярна. Часть A_D оператора A , действующую в $H_D(A)$, естественно называть *сингулярной частью оператора A* , а ее спектр $S(A_D)$ — *сингулярной частью спектра оператора A* . Очевидно $D(A) \subset S(A_D)$.

Собственные значения, принадлежащие $S(A_D)$, образуют дискретную компоненту сингулярной части спектра оператора A . Дополнение этой компоненты до всего $S(A_D)$ назовем непрерывной компонентой сингулярной части спектра оператора A .

2. Спектры расширений и расщепление замкнутых линейных операторов. Из определения спектра и его компонент следует, что если $\tilde{T}$ есть замкнутое линейное расширение замкнутого оператора T , то

$$C(\tilde{T}) \supset C(T), \quad D(\tilde{T}) \supset D(T),$$

но

$$O(\tilde{T}) \subset O(T).$$

Будем называть расширение $\tilde{T}$ конечномерным, если $\dim \mathfrak{D}_{\tilde{T}} < \infty \pmod{\mathfrak{D}_T}$, и бесконечномерным — в противном случае.

Теорема 4. Если $\tilde{T}$ есть конечномерное линейное расширение замкнутого оператора T , то $C(\tilde{T}) = C(T)$.

Доказательство может быть исчерпано ссылкой на предыдущую теорему. Независимое от тонкой теоремы С. Банаха доказательство теоремы 4 приводится ниже.

Достаточно установить, что если $\lambda \notin C(T)$, то $\lambda \notin C(\tilde{T})$. Пусть $\lambda \notin C(T)$. Если $\lambda \in D(\tilde{T})$, то кратность собственного значения λ конечна, так как она не превосходит $k + m$, где k есть кратность числа λ , как собственного значения оператора T , а $m = \dim \mathfrak{D}_{\tilde{T}} \pmod{\mathfrak{D}_T}$. Теперь, в силу теоремы 2, достаточно установить ограниченность оператора $(\tilde{T}' - \lambda I)^{-1}$.

Пусть $\tilde{G}$ есть собственное подпространство оператора $\tilde{T}$, соответствующее собственному значению λ (если $\lambda \notin D(\tilde{T})$, то полагаем $\tilde{G} = 0$), и пусть $\tilde{P}$ — оператор проектирования на $H \ominus \tilde{G}$.

Если $h \in (\tilde{T} - \lambda I) \mathfrak{D}_{\tilde{T}}$, то $h = f + g$, где f есть проекция h на $\Delta = (T - \lambda I) \mathfrak{D}_T$, а g принадлежит некоторому конечномерному подпространству F , ортогональному к Δ .

Имеем

$$\begin{aligned}\|(\tilde{T}' - \lambda I)^{-1} h\| &= \|(\tilde{T}' - \lambda I)^{-1} f + (\tilde{T}' - \lambda I)^{-1} g\| = \\ &= \|\tilde{P}(T' - \lambda I)^{-1} f + (\tilde{T}' - \lambda I)^{-1} g\| \leq \\ &\leq \|(T' - \lambda I)^{-1} f\| + \|(\tilde{T}' - \lambda I)^{-1} g\| \leq \\ &\leq M \|f\| + \mu \|g\| = (M + \mu) \|h\|,\end{aligned}$$

так что оператор $(\tilde{T}' - \lambda I)^{-1}$ является ограниченным.

Здесь использованы ограниченность оператора $(T' - \lambda I)^{-1}$ и ограниченность оператора $(\tilde{T}' - \lambda I)^{-1}$ на конечномерном подпространстве F .

Из доказанной теоремы 4 следует, что непрерывные спектры различных конечномерных расширений данного линейного замкнутого оператора совпадают.

Расщеплением линейного замкнутого оператора назовем представление этого оператора в виде расширения ортогональной суммы двух других замкнутых операторов. Расщепление назовем *конечномерным*, если это расширение является конечномерным. Расщепление оператора T определяется равенствами

$$T = \tilde{T}_0, \quad T_0 = T_1 \oplus T_2,$$

и из теоремы 4 для конечномерных расширений следует соотношение

$$C(T) = C(T_1) \cup C(T_2), \quad (8)$$

выражающее принцип расщепления для замкнутых операторов. Далее, в п° 17, этот принцип будет распространен на некоторые бесконечномерные расширения.

3. Спектр самосопряженного оператора и пробные многообразия. Если оператор A самосопряженный, то $O(A) = \emptyset$ и, следовательно,

$$S(A) = D(A) \cup C(A).$$

Так как любое не вещественное значение λ является точкой регулярности оператора A , то спектр $S(A)$ самосопряженного оператора есть замкнутое множество точек вещественной оси. Как известно, спектр $S(A)$ совпадает с множеством точек роста спектральной функции E_λ оператора A . При этом часть $D(A)$ спектра $S(A)$ совпадает с множеством точек

разрыва монотонной оператор-функции E_λ и, следовательно, счетна или конечна.

Теорема 5. Если λ_0 есть неизоллированная точка роста функции E_λ , то $\lambda_0 \in C(A)$. Обратно, если точка λ_0 принадлежит $C(A)$, но не является собственным значением бесконечной кратности, то λ_0 есть неизоллированная точка роста функции E_λ .

Доказательство. Если λ_0 есть неизоллированная точка роста функции E_λ , то в каждой окрестности точки λ_0 найдется интервал Δ , не содержащий λ_0 и такой, что $E(\Delta) \neq \emptyset$. (Символом « $\emptyset$ », здесь и далее обозначается пустое множество.) Таким образом, существует бесконечная последовательность непересекающихся интервалов таких, что $E(\Delta_n) \neq \emptyset$, $\lambda_0 \notin \Delta_n$ и концы интервала Δ_n сходятся к λ_0 .

Выбирая произвольно в каждом подпространстве $E(\Delta_n)H$ нормированный вектор f_n , получим бесконечную ортонормированную и, следовательно, некомпактную последовательность, для которой будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (A - \lambda_0 I) f_n = 0,$$

так что $\lambda_0 \in C(A)$.

Если теперь точка λ_0 принадлежит $C(A)$, но не является собственным значением бесконечной кратности, то, согласно теореме 2, оператор $(A' - \lambda_0 I)^{-1}$ не ограничен. С другой стороны, если λ_0 была бы изоллированной точкой роста функции E_λ , то она была бы точкой постоянства спектральной функции E'_λ оператора A' в замыкании F' и, следовательно, оператор $(A' - \lambda_0 I)^{-1}$ был бы ограничен. Теорема доказана.

Если оператор A а priori не может иметь собственных значений бесконечной кратности (таковы, например, одномерные дифференциальные операторы), то из изложенного выше следует, что $C(A)$ совпадает с множеством неизоллированных точек спектра $S(A)$.

Дальнейшие теоремы связывают некоторые свойства спектра с существованием в $\mathfrak{D}_A$ пробных многообразий. В формулировке теоремы 6 и далее *дефектным числом* любого подпространства F называется размерность ортогонального дополнения $H \ominus F$. Дефектное число подпространства F обозначается через $\text{Def } F$.

Теорема 6 [31 (2)]. Для того чтобы интервал $\Delta = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ содержал лишь конечное множество точек спектра самосопряженного оператора A , необ-

ходимо и достаточно существование подпространства F с конечным дефектным числом такого, чтобы для всех $f \in \mathfrak{D}_A \cap F$ выполнялось неравенство

$$\|(A - \lambda_0 I) f\| > \delta \|f\|. \quad (9)$$

Доказательство следует из спектральной формулы

$$\|(A - \lambda_0 I) f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda - \lambda_0|^2 d(E_\lambda f, f). \quad (10)$$

Действительно, предполагая, что пересечение $S(A) \cap \Delta$ состоит из конечного числа собственных значений конечной кратности, и обозначая через G линейную оболочку всех собственных векторов, соответствующих собственным значениям из Δ , получим с помощью (10) для элементов $f \in \mathfrak{D}_A$, ортогональных к G , соотношение

$$\|(A - \lambda_0 I) f\|^2 = \int_{|\lambda - \lambda_0| \geq \delta} |\lambda - \lambda_0|^2 d(E_\lambda f, f) > \delta^2 \|f\|^2, \quad (11)$$

то есть неравенство (9).

Если, наоборот, для всех $f \in \mathfrak{D}_A \cap F$ имеет место (9), то, допуская, что множество $S(A) \cap \Delta$ не исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности, получим, что многообразие $E(\Delta)H$ бесконечномерно. Если теперь выбрать в $E(\Delta)H$ элемент $f \in \mathfrak{D}_A \cap F$, которым может служить любой вектор из $E(\Delta)H$, ортогональный к проекции G на $E(\Delta)H$, то из (10) получаем

$$\|(A - \lambda_0 I) f\|^2 = \int_{\lambda_0 - \delta}^{\lambda_0 + \delta} |\lambda - \lambda_0|^2 d(E_\lambda f, f),$$

что приводит к неравенству

$$\|(A - \lambda_0 I) f\| \leq \delta \|f\|,$$

где $f \in \mathfrak{D}_A \cap F$, а это противоречит (9).

Приведенными рассуждениями по существу установлена более точная

Теорема 6^{bis}. Для того чтобы количество точек спектра самосопряженного оператора A , лежащих в заданном интервале $\Delta = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$, не превышало числа t , необходимо и достаточно существование подпространства F с дефектным числом t такого, чтобы для всех $f \in \mathfrak{D}_A \cap F$ выполнялось неравенство (9).

Теорема 6 дает необходимое и достаточное условие отсутствия точек непрерывной части спектра в данном интервале. Из этой теоремы, в частности, следует

Теорема 7 [31 (2)]. Если интервал $\Delta = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ свободен от непрерывной части спектра самосопряженного оператора A , а B — ограниченный самосопряженный оператор с нормой, меньшей δ , то точка λ_0 не принадлежит непрерывной части спектра суммы $A + B$.

Действительно, из неравенства (9) при $f \in \mathfrak{D}_A \cap F$ следует

$$\|(A + B - \lambda_0 I) f\| \geq \|(A - \lambda_0 I) f\| - \|Bf\| > (\delta - \|B\|) \|f\|.$$

Для односторонних возмущений доказанное предложение допускает следующее уточнение.

Теорема 7^{bis}. Если A есть самосопряженный оператор, для которого $C(A) \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$, а B — неотрицательный оператор с нормой $\|B\| = \gamma < \beta - \alpha$, то $C(A + B) \cap (\alpha + \gamma, \beta) = \emptyset$.

Доказательство. Из соотношения $C(A) \cap (\alpha, \beta) = \emptyset$ следует, очевидно, соотношение $C\left(A + \frac{\gamma}{2} I\right) \cap \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}, \beta + \frac{\gamma}{2}\right) = \emptyset$, так что для данного λ из интервала $(\alpha + \gamma, \beta)$ существует, согласно теореме 6, подпространство F с конечным дефектным числом такое, что

$$\left\| \left(A + \frac{\gamma}{2} I - \lambda I \right) f \right\| > \frac{\gamma + \delta}{2} \|f\| \quad (\delta > 0)$$

при $f \in \mathfrak{D}_A \cap F$. Из этого соотношения и равенства

$$\left\| B - \frac{\gamma}{2} I \right\| = \frac{\gamma}{2}$$

следует при любом $f \in \mathfrak{D}_A \cap F$ неравенство

$$\begin{aligned} \|(A + B - \lambda I) f\| &\geq \left\| \left(A + \frac{\gamma}{2} I - \lambda I \right) f \right\| - \\ &\quad - \left\| \left(B - \frac{\gamma}{2} I \right) f \right\| > \delta \|f\|. \end{aligned}$$

Из полученного неравенства в силу теоремы 6 следует соотношение

$$C(A + B) \cap (\alpha + \gamma, \beta) = \emptyset,$$

которое и требовалось установить.

Если $\alpha = -\infty$, но $\gamma < \infty$, то приведенные рассуждения сохраняют силу. Если же при $\alpha = -\infty$ будет $\gamma = \infty$, то приведенное доказательство и само утверждение теряют силу.

Из теоремы 7 вытекает следующая известная теорема Г. Вейля.

Теорема 8 [20 (1)]. Если к самосопряженному оператору A прибавить вполне непрерывный самосопряженный оператор K , то непрерывная часть его спектра не изменится, так что будет $C(A + K) = C(A)$.

Доказательство. Пусть $\lambda_0 \in C(A + K)$, но $\lambda_0 \notin C(A)$, так что при некотором $\delta > 0$ имеет место соотношение $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta) \cap C(A) = \emptyset$. Представляя оператор K в виде $K = K_1 + K_2$, где K_1 — ограниченный конечномерный оператор, а K_2 — самосопряженный оператор с малой нормой $\|K_2\| < \delta$, получаем в силу теорем 6 и 7 соотношение $\lambda_0 \notin C(A + K)$, противоречащее принятому предположению. В силу симметрии формулировки теоремы относительно операторов A и $A + K$ теорема 8 доказана. Некоторым обобщениям этой теоремы будет посвящен п° 5.

Теорема 9 [31 (3)]. Для того чтобы в интервале $\Delta = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ содержалось бесконечное множество точек спектра самосопряженного оператора A , необходимо и достаточно существование бесконечномерного линейного многообразия $G \subset \mathfrak{D}_A$, на котором было бы

$$\|(A - \lambda_0 I) f\| < \delta \|f\|. \quad (12)$$

Доказательство. Необходимость условия становится очевидной, если принять $G = E(\Delta)H$.

Переходя к доказательству достаточности приведенного условия, предположим, что, вопреки утверждению теоремы, в интервале Δ имеется лишь конечное множество собственных значений, и обозначим через F ортогональное дополнение подпространства $E(\Delta)H$ до всего H . Подпространство F имеет конечное дефектное число, и при $f \in F$ будет выполняться неравенство (11).

Так как подпространство $E(\Delta)H$ конечномерно, то можно найти в G вектор f , ортогональный к $E(\Delta)H$. Для найденного вектора будет иметь место неравенство (11), противоречащее (12).

Приведенными рассуждениями, по существу, установлена более точная

Теорема 9^{bls}. Количество точек спектра самосопряженного оператора A , лежащих в интервале $\Delta = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$, равно максимальной размерности линейных многообразий $G \subset \mathfrak{D}_A$, на которых выполнено неравенство (12).

Теорема 9 дает необходимое и достаточное условие наличия точек непрерывной части спектра в данном интервале.

Другой признак существования непрерывной части спектра в данном интервале дает следующая теорема, которая легко устанавливается с помощью спектрального разложения. Эта теорема используется в главе V.

Теорема 10. Для того чтобы в интервале $\Delta = (\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ содержалось бесконечное множество точек спектра самосопряженного оператора A , необходимо и достаточно существование некомпактной ограниченной последовательности $\varphi_n \in \mathfrak{D}_A$, для которой

$$\|A\varphi_n - \lambda_0\varphi_n\| < \delta\|\varphi_n\| \quad (n = 1, 2, \dots).$$

В дальнейшем везде (за исключением п° 6) рассматриваемые симметрические операторы обладают равными дефектными числами. Дефектное число такого симметрического оператора A обозначается через $\text{Def } A$.

Из теоремы 9 вытекает следующее предложение, которое для случая симметрических операторов уточняет ранее установленную теорему 4.

Теорема 11. Если множество точек спектра одного из самосопряженных расширений симметрического оператора с конечным дефектным числом, лежащих в данном интервале (α, β) , бесконечно, то множество точек спектра любого другого самосопряженного расширения данного оператора, лежащих в этом интервале, также бесконечно.

Очевидно, каждая точка λ непрерывной части спектра самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A принадлежит одному из следующих четырех типов:

1) при некотором $\delta_1 > 0$ и любом $\delta_2 > 0$

$$(\lambda - \delta_1, \lambda) \cap S(\tilde{A}) = \emptyset, \quad (\lambda, \lambda + \delta_2) \cap S(\tilde{A}) \neq \emptyset,$$

2) при любом $\delta_1 > 0$ и некотором $\delta_2 > 0$

$$(\lambda - \delta_1, \lambda) \cap S(\tilde{A}) \neq \emptyset, \quad (\lambda, \lambda + \delta_2) \cap S(\tilde{A}) = \emptyset,$$

3) при любых $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$

$$(\lambda - \delta_1, \lambda) \cap S(\tilde{A}) \neq \emptyset, \quad (\lambda, \lambda + \delta_2) \cap S(\tilde{A}) \neq \emptyset,$$

4) при некоторых $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$

$$(\lambda - \delta_1, \lambda) \cap S(\tilde{A}) = \emptyset, \quad (\lambda, \lambda + \delta_2) \cap S(\tilde{A}) = \emptyset.$$

Из теоремы 11 следует, что *тип каждой точки непрерывной части спектра самосопряженного расширения $\tilde{A}$ данного симметрического оператора A с конечным дефектным числом не зависит от выбора расширения.*

Назовем *лакуной* непрерывной части спектра симметрического оператора A любой смежный интервал замкнутого множества $S(A)$.

В [53(2)] на основе свойства аналитичности резольвенты с помощью леммы Гейне — Бореля было установлено, что если интервал (α, β) принадлежит резольвентному множеству симметрического оператора с конечным дефектным числом, то спектр любого самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A в интервале (α, β) состоит из изолированного множества собственных значений конечной кратности. Следующее предложение, непосредственно вытекающее из теоремы 10, содержит и, в своей второй части, несколько дополняет этот результат.

Теорема 11^{bis}. *Если интервал (α, β) является лакуной непрерывной части спектра $S(A)$ симметрического оператора с конечным дефектным числом, то этот интервал является лакуной непрерывной части спектра $S(A)$ любого самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A .*

Если при этом для некоторого самосопряженного расширения A конец интервала α (или β) является предельной точкой множества собственных значений, лежащих внутри лакуны (α, β) , то для любого самосопряженного расширения $\tilde{A}$ этот же конец интервала α (соответственно β) также будет предельной точкой множества собственных значений, лежащих внутри лакуны (α, β) .

Следующие предложения устанавливаются аналогично теоремам 6 (6^{bis}) и 9 (9^{bis}). При этом роль интервала $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ переходит к полуоси $(-\infty, \lambda_0)$.

Теорема 12. Для того чтобы часть спектра самосопряженного оператора A , расположенная левее данной точки λ_0 , была конечным множеством, необходимо и достаточно существование подпространства F с конечным дефектным числом такого, чтобы для всех $f \in \mathfrak{D}_A \cap F$ выполнялось неравенство

$$(Af - \lambda_0 f, f) > 0. \quad (13)$$

Теорема 12^{bls}. Для того чтобы количество точек спектра самосопряженного оператора A , расположенных левее данной точки λ_0 , не превышало числа t , необходимо и достаточно существование подпространства F с дефектным числом t такого, чтобы для всех $f \in \mathfrak{D}_A \cap F$ выполнялось неравенство (13).

Теорема 13 [31 (3)]. Для того чтобы часть спектра самосопряженного оператора A , расположенная левее данной точки λ_0 , была бесконечным множеством, необходимо и достаточно существование бесконечномерного многообразия $G \subset \mathfrak{D}_A$, на котором было бы

$$(Af - \lambda_0 f, f) < 0. \quad (14)$$

Теорема 13^{bls}. Количество точек спектра самосопряженного оператора A , лежащих левее данной точки λ_0 , равно максимальной размерности линейных многообразий $G \subset \mathfrak{D}_A$, на которых выполнено неравенство (14).

Если при любом $\lambda < \lambda_0$ пересечение $(-\infty, \lambda) \cap S(A)$ исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности, то говорят, что левее точки λ_0 спектр дискретен. Последнее, очевидно, означает, что часть спектра $S(A)$, лежащая в интервале $[-\infty, \lambda_0]$, не имеет других предельных точек, кроме, быть может, точки λ_0 .

Из теоремы 13 непосредственно следует

Теорема 14 [53 (2)]. Если множество точек спектра одного из самосопряженных расширений симметрического оператора с конечным дефектным числом, лежащих левее (правее) точки λ_0 , бесконечно, то множество точек спектра любого другого самосопряженного расширения данного оператора, лежащих левее (соответственно правее) точки λ_0 , также бесконечно.

В частности, из теоремы 14 следует, что если спектр одного из самосопряженных расширений данного

симметрического оператора с конечным дефектным числом ограничен снизу (сверху), то спектр любого другого самосопряженного расширения данного оператора также ограничен снизу (соответственно сверху). Это последнее утверждение остается справедливым для некоторых симметрических операторов с бесконечным дефектным числом (см., далее, п° 19).

В связи с дальнейшими применениями отметим, что в случае функционального гильбертова пространства при ссылках на теорему 12 достаточно проверить неравенство (13) лишь на вещественных функциях. Действительно, если неравенство (13) выполнено на вещественной оболочке двух вещественных функций φ и ψ , то

$$|(A\varphi - \lambda_0\varphi, \psi)|^2 \leq (A\varphi - \lambda_0\varphi, \varphi)(A\psi - \lambda_0\psi, \psi)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} ([A - \lambda_0 I](\varphi + i\psi), \varphi + i\psi) &\geq \\ &\geq [V(A\varphi - \lambda_0\varphi, \varphi) - V(A\psi - \lambda_0\psi, \psi)]^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Отметим еще попутно, что если неравенство (9) выполняется на вещественной линейной оболочке двух вещественных функций φ и ψ , то для функции $\varphi + i\psi$ будет

$$\|(A - \lambda_0 I)(\varphi + i\psi)\| > \frac{\delta}{\sqrt{2}} \|\varphi + i\psi\|.$$

Пусть вещественное значение λ_0 является точкой регулярного типа симметрического оператора A . Если $\text{Def } A < \infty$, то для любого самосопряженного расширения $\tilde{A}$ оператора A будет $\lambda_0 \notin C(\tilde{A})$, но для некоторых расширений будет $\lambda_0 \in D(\tilde{A})$ (см. [7]). Если же $\text{Def } A = \infty$, то для некоторых самосопряженных расширений $\tilde{A}$ может быть не только $\lambda_0 \in D(\tilde{A})$, но даже $\lambda_0 \in C(\tilde{A})$. Однако во всех случаях пересечение спектров $S(\tilde{A})$ всех самосопряженных расширений $\tilde{A}$ оператора A не содержит точек регулярного типа оператора A . Соответствующее предложение, которое формулируется ниже, принадлежит И. Кэлкину [56], а приводимое здесь доказательство в основном заимствуется из заметки [24(1)] М. И. Вишика.

Теорема 15 [56]. Если λ_0 есть точка регулярного типа симметрического оператора A с конечным или бесконечным дефектным числом, то существует самосопряженное расширение $\tilde{A}$ оператора A , для которого $\lambda_0 \in S(\tilde{A})$.

Доказательство. Не ограничивая общности, положим $\lambda_0 = 0$ и обозначим через G подпространство решений уравнения $A^*g = 0$. Пусть, далее, линейное многообразие $\mathfrak{M}$ есть полный прообраз подпространства G при отображении с помощью опера-

тора A^* , так что

$$A^*\mathfrak{M} = G.$$

Так как $A^*G = 0$, то $G \subset \mathfrak{M}$ и линейное многообразие $\mathfrak{M}$ можно представить в виде ортогональной суммы

$$\mathfrak{M} = G \oplus \mathfrak{N},$$

где $\mathfrak{N}$ есть некоторое линейное многообразие.

Определим теперь оператор $\tilde{A} \subset A^*$ с областью определения

$$\mathfrak{D}_{\tilde{A}} = \mathfrak{D}_A \dot{+} \mathfrak{N} \quad (15)$$

и покажем, что оператор $\tilde{A}$ самосопряженный и точка $\lambda = 0$ не принадлежит его спектру.

Сначала отметим, что сумма в (15) прямая, ибо из равенства

$$\varphi + h = 0 \quad (\varphi \in \mathfrak{D}_A, h \in \mathfrak{N})$$

следует после применения оператора A^* равенство $A\varphi + A^*h = 0$, откуда, в силу ортогональности слагаемых, получаем $A\varphi = A^*h = 0$, но нуль есть точка регулярного типа оператора A , так что $\varphi = 0$ и, следовательно, $h = 0$.

Если теперь $f \in \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$, $g \in \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ и

$$f = \varphi + u,$$

$$g = \psi + v,$$

где φ и ψ из $\mathfrak{D}_A$, а u и v из $\mathfrak{N}$, то симметричность оператора $\tilde{A}$ вытекает из соотношений

$$(\tilde{A}f, g) = (\tilde{A}[\varphi + u], \psi + v) = (A\varphi, \psi) + (A\varphi, v) + (\tilde{A}u, \psi),$$

$$(f, \tilde{A}g) = (\varphi + u, \tilde{A}[\psi + v]) = (\varphi, A\psi) + (\varphi, \tilde{A}v) + (u, A\psi).$$

Наконец, из (15) следует

$$\tilde{A}\mathfrak{D}_{\tilde{A}} = A\mathfrak{D}_A \oplus A^*\mathfrak{N} = A\mathfrak{D}_A \oplus G = H,$$

так что оператор $\tilde{A}$ является самосопряженным и значение $\lambda = 0$ есть его точка регулярности, что и требовалось доказать.

4. Относительная полная непрерывность симметрических операторов. Начнем с уточнения терминологии, относящейся к полуограниченным операторам.

Симметрический оператор A называется *полуограниченным*, если для некоторого $\gamma > -\infty$ при всех $f \in \mathfrak{D}_A$ выполняется неравенство

$$(Af, f) \geq \gamma(f, f). \quad (16)$$

При этом наибольшее значение α постоянной γ , при котором неравенство (16) еще выполняется для всех $f \in \mathfrak{D}_A$,

называется *нижней гранью* оператора A . Если $\alpha > 0$, то оператор A называется *положительно определенным*. Если же $\alpha \geq 0$, то оператор A назовем *неотрицательным*.

Для неотрицательного оператора A имеет место неравенство Коши — Буняковского

$$|(Af, g)|^2 \leq (Af, f)(Ag, g),$$

из которого следует, что равенство

$$(Af, f) = 0$$

возможно лишь при $Af = 0$.

Если для всех отличных от нуля элементов $f \in \mathfrak{D}_A$ выполняется неравенство

$$(Af, f) > 0,$$

то неотрицательный оператор A будем называть *положительным*.

С помощью любого положительного оператора A можно определить на линейном многообразии $\mathfrak{D}_A$ скалярное произведение

$$[f, g]_A = (Af, g). \quad (17)$$

Определяемая формулой (17) $A \sim$ метрика превращает $\mathfrak{D}_A$ в некоторое (вообще говоря, неполное) гильбертово пространство.

Если оператор A является положительно определенным, то $A \sim$ метрика превращает $\mathfrak{D}_A$ в такую линейную метризованную систему $\dot{H}_A$, которую можно, очевидно, пополнить, не выходя из H . Полученное таким образом полное гильбертово пространство обозначим через H_A (см. [69 (1)]). При этом скалярное произведение $[f, g]_A$, определенное первоначально лишь на $\mathfrak{D}_A$ формулой (17), по непрерывности доопределяется для любых f и g из H_A .

Как установил К. Фридрихс [97 (1)], у любого симметрического положительно определенного оператора A существует такое самосопряженное расширение $\mathring{A}$, для которого

$$H_{\mathring{A}} = H_A. \quad (18)$$

Из последнего соотношения следует, что нижние грани операторов A и $\mathring{A}$ совпадают. Тем самым К. Фридрихсом было оправдано предположение Дж. Неймана [73] о возможности самосопряженного расширения полуограниченного

оператора с сохранением нижней грани. Позднее М. Г. Крейн показал [53 (2)], что условием (18) самосопряженное расширение $\overset{\circ}{A}$ оператора A определяется однозначно. Согласно М. Г. Крейну оператор $\overset{\circ}{A}$ называется *жестким* расширением оператора A . Между рассматриваемыми многообразиями имеет место очевидное соотношение $\mathfrak{D}_{\overset{\circ}{A}} \subset \mathfrak{D}_A \subset H_A \subset H$. При этом формула (17) для скалярного произведения $[f, g]_A$ в H_A сохраняется при любых $f \in \mathfrak{D}_{\overset{\circ}{A}}$ и $g \in H_A$, если заменить в ее правой части A на $\overset{\circ}{A}$. Отметим еще, что пространство H_A совпадает с $\mathfrak{D}_{\overset{\circ}{A}^2}$ и при любых $f, g \in H_A$ правую часть (17)

следует заменить на $\left(\overset{\circ}{A}^{\frac{1}{2}} f, \overset{\circ}{A}^{\frac{1}{2}} g \right)$ [53 (2)].

Если оператор A полуограничен снизу, то, очевидно, при некотором $\mu > 0$ оператор $A + \mu I$ будет положительно определенным. Метрики, определяемые на $\mathfrak{D}_A$ формулой

$$[f, g] = ([A + \mu I] f, g) \quad (19)$$

при различных μ , для которых оператор $A + \mu I$ является положительно определенным, очевидно топологически эквивалентны и приводят после замыкания $\mathfrak{D}_A$ к одному и тому же пространству $H_A \subset H$. Все эти метрики будем в дальнейшем именовать *A-метриками*.

Если при данном μ оператор $A + \mu I$ положителен, но не известно, является ли он положительно определенным, то метрику, определяемую формулой (19), назовем *A ~ метрикой* (тильда вместо дефиса!).

Если при данном μ оператор $A + \mu I$ положительный, но не положительно определенный, то *A ~ метрика*, соответствующая этому значению μ , вообще говоря, не эквивалентна *A-метрикам* и замыкание $\mathfrak{D}_A$ в *A ~ метрике* за счет элементов пространства H может оказаться невозможным.

Вместе с терминами *A-* и *A ~ метрика* имеют очевидный смысл термины *A-* и *A ~ сходимость*, *A-* и *A ~ ограниченность*, *A-* и *A ~ плотность* и т. д.

Пусть теперь A есть некоторый положительно определенный (возможно, незамкнутый) оператор с плотной в H областью определения $\mathfrak{D}_A$, а K — некоторый симметрический (вообще говоря, незамкнутый) оператор с областью определения $\mathfrak{D}_K = \mathfrak{D}_A$. Назовем оператор K *вполне непрерывным относительно A*, если вполне непрерывен в H_A оператор $\overset{\circ}{A}^{-1} K$.

Если $A = I$ (или, более общим образом, когда оператор A ограничен), то относительно полная непрерывность совпадает с обычной. Легко видеть также, что из полной непрерывности оператора K в обычном смысле следует его полная непрерывность относительно любого положительно определенного оператора A .

Введенный выше оператор $\mathring{A}^{-1}K$ является симметрическим в H_A , так как форма

$$[\mathring{A}^{-1}Kf, f]_A = (Kf, f) \quad (20)$$

вещественна на $\mathfrak{D}_A$. Если оператор $\mathring{A}^{-1}K$ вполне непрерывен в H_A , то его расширение по непрерывности на все H_A также будет вполне непрерывным. Это расширение будем обозначать через T .

Если оператор K положителен, то полная непрерывность K относительно A эквивалентна компактности в $K \sim$ метрике любого множества из $\mathfrak{D}_A$, ограниченного в A -метрике. Это вытекает из следующей простой теоремы.

Теорема 16 [13 (5)]. Для того чтобы положительный оператор K был вполне непрерывным относительно положительно определенного оператора A ($\mathfrak{D}_K = \mathfrak{D}_A$), необходимо и достаточно, чтобы любое A -ограниченное множество элементов из $\mathfrak{D}_A$ было K -компактным.

Доказательство. Пусть оператор K вполне непрерывен относительно A , так что оператор $\mathring{A}^{-1}K$ вполне непрерывен в H_A , и пусть $\{f_n\}$ есть произвольная A -ограниченная последовательность элементов из $\mathfrak{D}_A$.

Так как оператор $\mathring{A}^{-1}K$ вполне непрерывен в H_A , то из последовательности $\{\mathring{A}^{-1}Kf_n\}$ можно выделить A -сходящуюся подпоследовательность $\{\mathring{A}^{-1}Kf_{n_k}\}$. Но тогда подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ является $K \sim$ сходящейся, ибо

$$(K[f_{n_k} - f_{n_r}], [f_{n_k} - f_{n_r}]) = [\mathring{A}^{-1}K(f_{n_k} - f_{n_r}), (f_{n_k} - f_{n_r})]_A.$$

Пусть теперь, обратно, любое A -ограниченное множество элементов из $\mathfrak{D}_A$ является $K \sim$ компактным.

Тогда будет ограничен в H_A квадратичный функционал (Kf, f) , а вместе с ним, в силу (20), и квадратичный функционал $[\mathring{A}^{-1}Kf, f]_A$. Поэтому оператор $\mathring{A}^{-1}K$ будет A -ограниченным на $\mathfrak{D}_A$ и, следовательно, допускает расширение по

непрерывности на все H_A , которое обозначим через T . Так как $T > 0$, то можно определить на $\mathfrak{D}_A$ симметрический оператор $\sqrt{\mathring{A}^{-1}K}$, полагая $\sqrt{\mathring{A}^{-1}K} f = +\sqrt{T} f$ при $f \in \mathfrak{D}_A$.

Пусть $\{f_n\}$ есть любая A -ограниченная последовательность из H_A , а $\{\varphi_n\}$ — последовательность из $\mathfrak{D}_A$, удовлетворяющая в метрике H_A условию

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{f_n - \varphi_n\} = 0. \quad (21)$$

Если последовательность $\{\varphi_{n_k}\}$ является K -сходящейся частью последовательности $\{\varphi_n\}$, то из (20) следует, что будет A -сходящейся последовательность $\{\sqrt{T} \varphi_{n_k}\}$, а следовательно, в силу (21), и последовательность $\{\sqrt{T} f_{n_k}\}$. Таким образом, оператор $\sqrt{T}$ оказывается вполне непрерывным в H_A , а следовательно, вполне непрерывным в H_A будет и его квадрат T , а тем более оператор $\mathring{A}^{-1}K \subset T$.

Следующая теорема, в которой положительность оператора K не предполагается, дает удобный для приложений признак относительной полной непрерывности. Она показывает, что наличие положительной мажоранты оператора K , вполне непрерывной относительно A , влечет полную непрерывность самого оператора K относительно A .

Теорема 17 [13 (5)]. *Если симметрический оператор K и положительный оператор K_1 определены на $\mathfrak{D}_A$ и при всех $f \in \mathfrak{D}_A$ выполнено неравенство*

$$|(Kf, f)| \leq (K_1f, f),$$

то из полной непрерывности оператора K_1 относительно оператора A следует полная непрерывность относительно A оператора K .

Доказательство. При любом $f \in \mathfrak{D}_A$ имеем

$$|[\mathring{A}^{-1}Kf, f]_A| = |(Kf, f)| \leq (K_1f, f) = [\mathring{A}^{-1}K_1f, f]_A. \quad (22)$$

Так как, оператор $\mathring{A}^{-1}K_1$ вполне непрерывен в H_A , то он ограничен в H_A и из (22) следует ограниченность в метрике H_A симметрического в H_A оператора $\mathring{A}^{-1}K$. Будучи определенными на A -плотном в H_A многообразии $\mathfrak{D}_A$, ограниченные симметрические операторы $\mathring{A}^{-1}K$ и $\mathring{A}^{-1}K_1$ допускают расширения по непрерывности на все H_A , которые

обозначим через T и T_1 . При этом, очевидно, неравенство

$$|[Tf, f]_A| \leq [T_1f, f], \quad (23)$$

имевшее место на $\mathfrak{D}_A$, останется справедливым на всем H_A .

Теперь надо установить, что из полной непрерывности в H_A самосопряженного оператора T_1 и неравенства (23) вытекает полная непрерывность в H_A самосопряженного оператора T .

Разбивая H_A в ортогональную сумму положительного и отрицательного спектральных подпространств оператора T , получаем

$$H_A = F \oplus G, \quad T = TP + TQ, \quad (24)$$

где P и Q — операторы проектирования в H_A на F и G соответственно.

Для окончания доказательства остается установить полную непрерывность в H_A операторов TP и TQ .

Из полной непрерывности оператора T_1 в H_A следует полная непрерывность в H_A оператора PT_1P , а следовательно, и оператора $\sqrt{PT_1P}$.

Далее, заменяя в (23) f на Pf , получаем

$$[PTPf, f]_A \leq [PT_1Pf, f]_A$$

или, переходя к положительным радикалам,

$$[\sqrt{PTP} f, \sqrt{PTP} f]_A \leq [\sqrt{PT_1P} f, \sqrt{PT_1P} f]_A. \quad (25)$$

Из полученного неравенства (25) и ранее установленной полной непрерывности в H_A оператора $\sqrt{PT_1P}$ следует полная непрерывность в H_A оператора $\sqrt{PTP}$, а вместе с ним и оператора $PTP = TP$.

Из аналогичного рассуждения следует полная непрерывность в H_A оператора $QTQ = TQ$, так что, согласно (24), оператор T вполне непрерывен в H_A и теорема доказана.

В заключение установим лемму, используемую далее в п° 5.

Лемма 1 [13 (5)]. Если A — положительно определенный оператор, а K — симметрический оператор, вполне непрерывный относительно A , то оператор

$$B = A + K$$

полуограничен снизу и B -метрика эквивалентна A -метрике.

Доказательство. Так как расширение T оператора $A^{-1}K$ на все H_A вполне непрерывно в H_A , то оператор T представим в виде

$$T = R + S,$$

где R — некоторый ограниченный конечномерный оператор в H_A , а норма оператора S в H_A не превосходит заданного числа $\varepsilon > 0$.

Если $\{\varphi_k\}$ есть полная ортонормированная система собственных элементов самосопряженного оператора T в H_A , а $\{\lambda_k\}$ есть соответствующая последовательность собственных значений, то можно принять

$$Rf = \sum_{k=1}^n \lambda_k [f, \varphi_k]_A \varphi_k,$$

где число n выбрано так, чтобы было $|\lambda_k| < \varepsilon$ при $k > n$. Действительно, при указанном выборе n для любого $f \in H_A$

$$|[Sf, f]_A| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |\lambda_k| |[f, \varphi_k]_A|^2 < \varepsilon [f, f]_A.$$

Элементы φ_k могут не принадлежать $\mathfrak{D}_A$, но, заменяя их близкими в A -метрике элементами $\psi_k \in \mathfrak{D}_A$, получим

$$R = R_1 + R_2,$$

где

$$R_1 f = \sum_{k=1}^n \lambda_k [f, \psi_k]_A \psi_k,$$

а норма R_2 в H_A не превосходит ε .

Теперь

$$T = R_1 + S_1,$$

где $S_1 = R_2 + S$ и, следовательно, норма S_1 в H_A не превосходит 2ε .

Далее, при любом $f \in \mathfrak{D}_A$ имеем

$$\begin{aligned} [R_1 f, f]_A &= \sum_{k=1}^n \lambda_k [f, \psi_k]_A [\psi_k, f]_A = \sum_{k=1}^n \lambda_k (Af, \psi_k) (A\psi_k, f) = \\ &= \sum_{k=1}^n \lambda_k (f, A\psi_k) (A\psi_k, f), \end{aligned}$$

так что

$$|[R_1 f, f]_A| \leq \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \cdot \|A\psi_k\|^2 \cdot \|f\|^2 < M \|f\|^2,$$

и так как

$$(Kf, f) = [Tf, f]_A = [R_1f, f]_A + [S_1f, f]_A,$$

то имеет место неравенство

$$|(Kf, f)| \leq M \|f\|^2 + 2\varepsilon (Af, f).$$

Из полученного неравенства следует соотношение
 $(Bf, f) = (Af, f) + (Kf, f) \geq (Af, f) - M\|f\|^2 - 2\varepsilon(Af, f),$
откуда

$$(Bf, f) + M\|f\|^2 \geq (1 - 2\varepsilon)(Af, f).$$

Считая $\varepsilon < \frac{1}{2}$, получаем из последнего неравенства, что оператор B полуограничен снизу и из B -сходимости следует A -сходимость.

С другой стороны, оператор T , будучи вполне непрерывным в H_A , является в H_A ограниченным, и, обозначая его норму в H_A через $\|T\|_A$, имеем

$$(Bf, f) = (Af, f) + (ATf, f) \leq (1 + \|T\|_A)(Af, f),$$

откуда, в силу (16),

$$(Bf, f) + M\|f\|^2 \leq \left(1 + \|T\|_A + \frac{M}{\alpha}\right)(Af, f),$$

где α есть нижняя грань оператора A . Таким образом, из A -сходимости следует B -сходимость и лемма доказана полностью.

5. Обобщения теоремы Г. Вейля о вполне непрерывных возмущениях. Целью настоящего пункта является обобщение теоремы Г. Вейля в двух различных направлениях. Сначала приводится обобщение этой теоремы, установленной Г. Вейлем для самосопряженных операторов, на случай любых замкнутых операторов (см. также [36]). Затем дается принадлежащее М. Ш. Бирману [13(5)] обобщение теоремы Г. Вейля на случай относительно вполне непрерывных возмущений.

Первое из указанных обобщений удобно провести с помощью следующей леммы, которая будет использована вторично в п° 24.

Лемма 2. Из любой некомпактной ограниченной последовательности $\{f_n\}$ элементов гильбертова пространства можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$ та-

кую, чтобы последовательность разностей $\{f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\}$ также была некомпактной.

Доказательство. Так как последовательность $\{f_n\}$ некомпактна, то, в силу критерия компактности Хаусдорфа, при некотором $\varepsilon > 0$ не существует в H такого конечного множества элементов, в ε -окрестности которого лежала бы вся последовательность $\{f_n\}$. Отсюда вытекает возможность выделения из данной последовательности такой ее части, расстояние между двумя любыми элементами которой не менее числа ε . Эту подпоследовательность обозначим через $\{f_n^{(1)}\}$.

Далее, пользуясь слабой компактностью сферы гильбертова пространства, выделим из построенной подпоследовательности слабо сходящуюся часть $\{f_n^{(2)}\}$. Очевидно, при любом $g \in H$ будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_{n+1}^{(2)} - f_n^{(2)}, g) = 0. \quad (26)$$

Теперь покажем, что $\{f_n^{(2)}\}$ и есть искомая подпоследовательность.

Предположив противное, найдем в последовательности $\{f_{n+1}^{(2)} - f_n^{(2)}\}$ сходящуюся часть $\{f_{2n}^{(3)} - f_{2n-1}^{(3)}\}$ и, полагая

$$h = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{2n}^{(3)} - f_{2n-1}^{(3)}),$$

получим, в силу (26),

$$\|h\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (f_{2n}^{(3)} - f_{2n-1}^{(3)}, h) = 0,$$

так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_{2n}^{(3)} - f_{2n-1}^{(3)}) = 0. \quad (27)$$

Полученное предельное соотношение (27) противоречит неравенству

$$\|f_{2n}^{(3)} - f_{2n-1}^{(3)}\| \geq \varepsilon > 0,$$

которое имеет место по построению, и лемма доказана.

Приведенное доказательство леммы 2 было предложено автору М. И. Кадецком.

Теорема 18. Прибавление к замкнутому линейному оператору T вполне непрерывного оператора K не изменяет непрерывной части спектра, то есть

$$C(T + K) = C(T).$$

Доказательство. Достаточно установить, что из принадлежности точки λ множеству $C(T)$ следует ее принадлежность множеству $C(T + K)$.

Пусть $\lambda \in C(T)$ и $\{f_n\}$ — нормированная некомпактная последовательность элементов из $\mathfrak{D}_T$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (Tf_n - \lambda f_n) = 0.$$

Выделим из ограниченной последовательности $\{f_n\}$ слабо сходящуюся подпоследовательность $\{f_n^{(1)}\}$. Эту подпоследовательность вполне непрерывный оператор K преобразует в сильно сходящуюся последовательность $\{Kf_n^{(1)}\}$.

Теперь, пользуясь леммой 2, выделим из подпоследовательности $\{f_n^{(1)}\}$ часть $\{f_n^{(2)}\}$ такую, чтобы последовательность разностей $\{f_{n+1}^{(2)} - f_n^{(2)}\}$ была некомпактной.

Полагая $h_n = f_{n+1}^{(2)} - f_n^{(2)}$, получаем некомпактную ограниченную последовательность $\{h_n\}$ из $\mathfrak{D}_{T+K}$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Kh_n = 0,$$

и, следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [(T + K)h_n - \lambda h_n] = \lim_{n \rightarrow \infty} (Th_n - \lambda h_n) = 0,$$

откуда вытекает принадлежность точки λ множеству $C(T + K)$, что и требовалось установить.

Второе из указанных в начале пункта обобщений теоремы Г. Вейля дает следующая

Теорема 19 [13 (5)]. Если симметрический оператор A положительно определен, а симметрический оператор K вполне непрерывен относительно A , то оператор

$$B = A + K$$

ограничен снизу и

$$C(\mathring{B}) = C(\mathring{A}).$$

Доказательство. Ограниченность оператора B снизу была установлена леммой 1 п° 4, и, без ущерба для общности, можно считать его положительно определенным.

Так как, далее, по той же лемме A - и B -метрики эквивалентны, то вещественный квадратичный функционал $(Bf, f) - (Af, f)$ ограничен в H_A и, следовательно, существует в H_A ограниченный самосопряженный оператор T

такой, что

$$[f, g]_B - [f, g]_A = [f, Tg]_A \quad (28)$$

для всех $f \in H_A$.

При $f \in \mathfrak{D}_A$ имеем

$$[f, g]_B = (Bf, g) = (\mathring{A}\mathring{A}^{-1}Bf, g) = [\mathring{A}^{-1}Bf, g]_A$$

и соотношение (28) дает

$$\mathring{A}^{-1}Bf - f = Tf,$$

или

$$\mathring{A}^{-1}(B - A)f = Tf,$$

так что при $f \in \mathfrak{D}_A$

$$Tf = \mathring{A}^{-1}Kf \quad (29)$$

и, следовательно, оператор T вполне непрерывен в H_A .

Положив теперь для любого $h \in H$

$$\varphi = \mathring{B}^{-1}h, \quad \psi = \mathring{A}^{-1}h,$$

получаем при каждом $f \in H_A$

$$[f, \varphi]_B = [f, \mathring{B}^{-1}h]_B = (f, h) = (f, \mathring{A}\psi) = [f, \psi]_A.$$

Это соотношение в сочетании с (28) дает

$$[f, \psi]_A - [f, \varphi]_A = [f, T\varphi]_A,$$

то есть

$$[f, \mathring{A}^{-1}h - \mathring{B}^{-1}h]_A = [f, T\varphi]_A,$$

откуда

$$\mathring{A}^{-1}h - \mathring{B}^{-1}h = T\mathring{B}^{-1}h \quad (h \in H). \quad (30)$$

Для доказательства теоремы остается установить полную непрерывность в H оператора $T\mathring{B}^{-1}$.

Пусть множество $F \subset H$ ограничено в H . Тогда множество $\mathring{B}^{-1}F$ B -ограничено, а значит, и A -ограничено. Следовательно, множество $T\mathring{B}^{-1}F$ является A -компактным, а тем более компактным в H . Таким образом, в (30) оператор $T\mathring{B}^{-1}$ вполне непрерывен в H , и теорема Г. Вейля дает $C(\mathring{B}^{-1}) = C(\mathring{A}^{-1})$, а следовательно, также $C(\mathring{B}) = C(\mathring{A})$.

Из леммы 1 и доказанной теоремы вытекает, в частности, что левее первой точки непрерывной части спектра оператора $\mathring{A}$ спектр оператора $\mathring{B}$ дискретен и ограничен снизу. Это последнее предложение впервые было установлено К. Фридрихсом [97 (1)].

В одном случае (см. п° 43) наряду с теоремой 19 придется также воспользоваться следующим, близким к ней, предложением.

Теорема 20 [13 (5)]. Пусть метрики, порождаемые двумя положительно определенными операторами A и B с областями определения $\mathfrak{D}_B = \mathfrak{D}_A$ эквивалентны (так что $H_A = H_B$) и $K = B - A$. Пусть, далее, K_1 есть положительный оператор с областью определения $\mathfrak{D}_{K_1} = \mathfrak{D}_A$ такой, что квадратичный функционал $(K_1 f, f)$ является A -ограниченным, а $\tilde{K}_1$ есть расширение K_1 на все H_A по A -непрерывности.

Если при всех $f \in \mathfrak{D}_A$ имеет место неравенство

$$|(Kf, f)| \leq (K_1 f, f) \quad (31)$$

и из ограниченности множества $F \subset H$ вытекает $\tilde{K}_1$ -компактность множества $\mathring{B}^{-1}F$, то

$$C(\mathring{B}) = C(\mathring{A}).$$

Доказательство. Так как квадратичный функционал $(K_1 f, f)$ является A -ограниченным, то при любых $f \in \mathfrak{D}_A$

$$(K_1 f, f) \leq M(Af, f). \quad (32)$$

Это неравенство в сочетании с (31) приводит для любых $f, g \in \mathfrak{D}_A$ к оценке

$$(Kf, g)^2 \leq M^2(Af, f)(Ag, g).$$

В силу этой оценки билинейный функционал (Kf, g) , а вместе с ним и оператор K , допускает расширение $\tilde{K}$ по A -непрерывности на все H_A . При этом, очевидно, для любого $f \in H_A$ будет

$$|(\tilde{K}f, f)| \leq (\tilde{K}_1 f, f)$$

и, значит, для любых $f, g \in H_A$

$$|(\tilde{K}f, g)|^2 \leq (\tilde{K}_1 f, f)(\tilde{K}_1 g, g).$$

Последнее неравенство при $g = \mathring{A}^{-1}\tilde{K}f$ дает

$$(\mathring{A}g, g)^2 \leq (\tilde{K}_1f, f)(\tilde{K}_1g, g),$$

что в сочетании с (32) приводит к соотношению

$$(\mathring{A}g, g)^2 \leq M(\tilde{K}_1f, f)(\mathring{A}g, g)$$

или

$$(\mathring{A}g, g) \leq M(\tilde{K}_1f, f). \quad (33)$$

С другой стороны, как и при доказательстве предыдущей теоремы, получим соотношения (28), (29) и (30). При этом из (28) следует при любом $f \in H_A$ равенство

$$Tf = \mathring{A}^{-1}\tilde{K}f,$$

ибо последовательность векторов $\mathring{A}^{-1}\varphi_n$ сходится в H_A , если A -сходится последовательность $\varphi_n \in H_A$.

Пусть теперь множество F элементов $h \in H$ ограничено. Тогда по условиям теоремы множество $f = \mathring{B}^{-1}h$ ($h \in F$) является $\tilde{K}_1$ -компактным, откуда, в силу (33), следует компактность множества элементов $g = T\mathring{B}^{-1}h$ ($h \in F$) в H_A и, тем более, компактность его в H .

Таким образом, ограниченное в H множество F переводится оператором $T\mathring{B}^{-1}$ в множество, компактное в H , то есть оператор $T\mathring{B}^{-1}$ вполне непрерывен в H , а это означает, что разность (30) операторов $\mathring{A}^{-1}$ и $\mathring{B}^{-1}$ вполне непрерывна. Поэтому, согласно теореме Г. Вейля, непрерывные части спектров операторов $\mathring{A}$ и $\mathring{B}$ совпадают, что и требовалось установить.

6. О квадрате замкнутого симметрического оператора с конечным индексом дефекта. Сходные по содержанию теоремы 6 и 12, 9 и 13, 11 и 14 можно связать так, чтобы одна из них оказалась следствием другой, если ввести в рассмотрение квадрат симметрического оператора с конечным индексом дефекта.

Покажем, например, как вывести теорему 11 из теоремы 14, приняв пока без доказательства, что область определения оператора A^2 плотна в H и его дефектное число конечно, если A есть симметрический оператор с конечным дефектным числом.

Переходя к доказательству теоремы 11, предположим, что в интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ имеется бесконечное множество точек

спектра некоторого самосопряженного расширения $\tilde{A}_1$ оператора A . Отсюда с помощью спектральной формулы получаем, что отрицательная часть спектра самосопряженного оператора $B_1 = (\tilde{A}_1 - \lambda_0 I)^2 - \delta^2 I$ есть бесконечное множество. Но тогда, в силу теоремы 14, при любом другом самосопряженном расширении $\tilde{A}_2$ оператора A отрицательная часть спектра самосопряженного оператора $B_2 = (\tilde{A}_2 - \lambda_0 I)^2 - \delta^2 I$ также будет бесконечным множеством, так как оба оператора, B_1 и B_2 , являются самосопряженными расширениями одного и того же симметрического оператора $(A - \lambda_0 I)^2 - \delta^2 I$ с конечным дефектным числом. Так как множество точек отрицательной части спектра оператора B_2 бесконечно, то в интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ имеется бесконечное множество точек спектра оператора $\tilde{A}_2$ и теорема 11, таким образом, доказана.

Для обоснования принятых относительно оператора A^2 допущений приведем несколько предложений, установленных в [31 (1)] в связи с другими вопросами. Обобщение этих предложений на банаховы пространства даны в [5] и [35].

Лемма 3. Линейное многообразие $\mathfrak{M}$, плотное в пространстве H , одновременно плотно в любом его подпространстве F с конечным дефектным числом, то есть замыкание пересечения $\mathfrak{M} \cap F$ совпадает с F .

Доказательство. Пусть $\text{Def } F = m$ и $\{g_r\}_1^m$ есть базис пространства $H \ominus F$.

Так как многообразие $\mathfrak{M}$ плотно в H , то для любого $f \in F$ существует последовательность векторов $\{\varphi^{(k)}\} \subset \mathfrak{M}$ такая, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi^{(k)} = f. \quad (34)$$

Для доказательства теоремы надлежит отыскать подобную последовательность векторов в $\mathfrak{M} \cap F$. С этой целью выберем в многообразии $\mathfrak{M}$ векторы $\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_m$ настолько близкими к векторам $g_1, g_2, \dots, g_m$ соответственно, чтобы был отличен от нуля определитель $\text{Det} \|(\tilde{g}_j, g_k)\|_{j,k=1}^m$, и перейдем от каждого вектора $\varphi^{(k)}$ к вектору

$$\psi^{(k)} = \alpha_1^{(k)} \tilde{g}_1 + \alpha_2^{(k)} \tilde{g}_2 + \dots + \alpha_m^{(k)} \tilde{g}_m + \varphi^{(k)}.$$

Здесь числа $\alpha_1^{(k)}, \alpha_2^{(k)}, \dots, \alpha_m^{(k)}$ выбраны так, чтобы вектор $\psi^{(k)}$ попал в подпространство F , для чего достаточно определить эти числа из системы уравнений

$$\sum_{j=1}^m (\tilde{g}_j, g_r) \alpha_j^{(k)} + (\varphi^{(k)}, g_r) = 0 \quad (r = 1, 2, \dots, m).$$

Так как из условия (34) следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_j^{(n)} = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m),$$

то принадлежащая пересечению $\mathfrak{M} \cap F$ последовательность $\{\psi^{(k)}\}$ сходится к вектору f и лемма 3 доказана.

Л е м м а 4. Если нуль принадлежит полю регулярности $\Pi(T)$ замкнутого линейного оператора T с плотной в H областью определения и $\text{Def } T\mathfrak{D}_T < \infty$, а $F \subset H$ есть подпространство с конечным дефектным числом, то многообразие $T(\mathfrak{D}_T \cap F)$ является подпространством и

$$\text{Def } T(\mathfrak{D}_T \cap F) = \text{Def } T\mathfrak{D}_T + \text{Def } F.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Замкнутость линейного многообразия $T(\mathfrak{D}_T \cap F)$ следует из ограниченности оператора T^{-1} и замкнутости оператора T . Далее, положим

$$\text{Def } T\mathfrak{D}_T = m_1, \quad \text{Def } F = m_2$$

и выберем в подпространстве $H \ominus T\mathfrak{D}_T$ базис $\{g_k\}_1^{m_1}$ а в подпространстве $H \ominus F$ базис $\{f_k\}_1^{m_2}$.

Покажем, сначала, что

$$\text{Def } T(\mathfrak{D}_T \cap F) \geq m_1 + m_2. \quad (35)$$

Для доказательства этого неравенства достаточно указать $m_1 + m_2$ линейно независимых векторов, ортогональных подпространству $T(\mathfrak{D}_T \cap F)$. В качестве первых m_1 из этих векторов можно взять $g_1, g_2, \dots, g_{m_1}$, так как $T(\mathfrak{D}_T \cap F) \subset T\mathfrak{D}_T$.

Для построения остальных m_2 векторов расширим линейно ограниченный оператор T^{-1} с областью определения $T\mathfrak{D}_T$ на все пространство H и обозначим полученный оператор через R . Сопряженный оператор R^* будет также определен на всем H . В частности, он будет определен на подпространстве $H \ominus F$ и можно рассматривать векторы

$$R^*f_1, R^*f_2, \dots, R^*f_{m_2}.$$

Эти m_2 векторов ортогональны подпространству $T(\mathfrak{D}_T \cap F)$, так как при любом $\varphi \in \mathfrak{D}_T \cap F$ будет

$$(T\varphi, R^*f_k) = (RT\varphi, f_k) = (\varphi, f_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m_2).$$

Остается установить линейную независимость $m_1 + m_2$ векторов

$$g_1, g_2, \dots, g_{m_1}, R^*f_1, R^*f_2, \dots, R^*f_{m_2}. \quad (36)$$

Если предположить эти векторы зависимыми, то должно иметь место соотношение вида

$$g = R^*f,$$

где $g \in H \ominus T\mathfrak{D}_T$, $f \in H \ominus F$ и $f \neq 0$. Но тогда при любом $\varphi \in \mathfrak{D}_T$

$$(\varphi, f) = (T\varphi, R^*f) = (T\varphi, g) = 0,$$

откуда вследствие плотности $\mathfrak{D}_T$ в H заключаем, что $f = 0$. Итак, неравенство (35) доказано. Теперь покажем, что

$$\text{Def } T(\mathfrak{D}_T \cap F) \leq m_1 + m_2.$$

Для доказательства этого неравенства достаточно установить, что из ортогональности некоторого вектора f ко всем векторам (36) следует его принадлежность подпространству $T(\mathfrak{D}_T \cap F)$. Итак, пусть

$$(f, g_j) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m_1)$$

и

$$(f, R^* f_k) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, m_2).$$

Из первых m_1 равенств следует, что $f \in T\mathfrak{D}_T$, то есть $f = T\varphi$ ($\varphi \in \mathfrak{D}_T$), а из вторых m_2 равенств следует, что $T^{-1}f \in F$. Сопоставление этих двух выводов показывает, что $f \in T(\mathfrak{D}_T \cap F)$, и лемма доказана.

Теорема 21[31(1)]. Пусть T_1 и T_2 — замкнутые линейные операторы с плотными в H областями определения. Пусть, далее, эти операторы обладают точкой регулярного типа $\lambda = 0$ и при этом $\text{Def } T_1 \mathfrak{D}_{T_1} < \infty$ и $\text{Def } T_2 \mathfrak{D}_{T_2} < \infty$.

При этих условиях оператор $T_1 T_2$ замкнут и имеет плотную в H область определения. Этот оператор обладает точкой регулярного типа $\lambda = 0$ и

$$\text{Def } T_1 T_2 \mathfrak{D}_{T_1 T_2} = \text{Def } T_1 \mathfrak{D}_{T_1} + \text{Def } T_2 \mathfrak{D}_{T_2}. \quad (37)$$

Доказательство. Докажем замкнутость произведения $T_1 T_2$ и плотность в H многообразия $\mathfrak{D}_{T_1 T_2}$. С этой целью представим $\mathfrak{D}_{T_1 T_2}$ в виде

$$\mathfrak{D}_{T_1 T_2} = T_2^{-1}(\mathfrak{D}_{T_1} \cap T_2 \mathfrak{D}_{T_2}). \quad (38)$$

Так как подпространство $F = T_2 \mathfrak{D}_{T_2}$ обладает конечным дефектным числом, то, согласно лемме 3, пересечение $\mathfrak{D}_{T_1} \cap T_2 \mathfrak{D}_{T_2}$ плотно в подпространстве $F = T_2 \mathfrak{D}_{T_2}$. После применения ограниченного оператора T_2^{-1} получается многообразие, плотное в $\mathfrak{D}_{T_2}$ и, следовательно, плотное в H .

Для доказательства замкнутости оператора $T_1 T_2$ применим этот оператор к обеим частям равенства (38), что дает

$$T_1 T_2 \mathfrak{D}_{T_1 T_2} = T_1 (\mathfrak{D}_{T_1} \cap T_2 \mathfrak{D}_{T_2}).$$

Согласно лемме 4 многообразие

$$T_1 (\mathfrak{D}_{T_1} \cap F) = T_1 (\mathfrak{D}_{T_1} \cap T_2 \mathfrak{D}_{T_2})$$

замкнуто, откуда следует замкнутость оператора $T_1 T_2$.

Принадлежность нуля полю регулярности оператора $T_1 T_2$ очевидна. Наконец, формула (37) непосредственно следует из леммы 4.

Из доказанной теоремы вытекает следующая

Теорема 22. Если A есть симметрический оператор с конечным индексом дефекта (m, n) , то A^2 — также симметрический оператор, и его индекс дефекта есть $(m + n, m + n)$.

Доказательство. Из теоремы 21 следует, что оператор

$$A^2 + I = (A - iI)(A + iI)$$

замкнут, определен на плотном в H многообразии и

$$\text{Def}(A^2 + I) \mathfrak{D}_{A^2} = \text{Def}(A - iI) \mathfrak{D}_A + \text{Def}(A + iI) \mathfrak{D}_A = m + n.$$

Отсюда следует, что оператор A^2 замкнут и определен на плотном в H многообразии. Так как, кроме этого, оператор A^2 является симметрическим и точка $\lambda = -1$ принадлежит его полю регулярности, то

$$\text{Def } A^2 = \text{Def}(A^2 + I) \mathfrak{D}_{A^2} = m + n,$$

что и требовалось установить.

Доказанная теорема легко обобщается на произвольную натуральную степень симметрического оператора с конечным индексом дефекта. В частности, для любого симметрического оператора с равными дефектными числами получим формулу

$$\text{Def } A^n = n \text{ Def } A.$$

Из теоремы 22 следует справедливость принятых в начале пункта допущений относительно оператора A^2 .

В связи с вопросами, затронутыми в этом пункте, см. также [72 (1)].

§ 2. Одномерные самосопряженные дифференциальные операторы

7. Расщепление операторов и свойства спектра, не зависящие от поведения коэффициентов на конечном расстоянии. На протяжении всего дальнейшего изложения классом $C_k(\alpha, \beta)$ будет называться множество всех комплекснозначных k -кратно непрерывно дифференцируемых функций переменного x , определенных в открытом конечном или бесконечном интервале (α, β) . Через $\dot{C}_k(\alpha, \beta)$ будем обозначать множество всех функций из $C_k(\alpha, \beta)$, равных тождественно нулю вблизи концов интервала α и β .

Финитной функцией, как обычно, называется функция, равная тождественно нулю вне некоторого конечного интервала. Наименьший отрезок, вне которого данная финитная функция обращается тождественно в нуль, назовем ее *носителем*. Финитную функцию, равную тождественно нулю при $x > N$, будем называть *N -финитной*.

Согласно с принятыми обозначениями класс $\dot{C}_{2n}(0, \infty)$ есть множество всех комплекснозначных $2n$ -кратно непрерывно дифференцируемых финитных функций, равных нулю вблизи точки $x = 0$. Через $C_k[0, \infty)$ обозначим часть класса $C_k(0, \infty)$, состоящую из всех функций непрерывных

справа вместе со своими производными до k -го порядка в точке $x = 0$.

Введем на линейном многообразии $\dot{C}_{2n}(0, \infty)$ дифференциальную операцию

$$l = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} p_k(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}. \quad (1)$$

Здесь коэффициенты $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) предполагаются вещественными функциями класса $C_{n-k}[0, \infty)$ и $p_0(x) > 0$ при $x \geq 0$.

При более общих предположениях относительно коэффициентов $p_k(x)$, когда они считаются измеримыми и подчинены условиям

$$\int_0^x \frac{dt}{|p_0(t)|} < \infty, \quad \int_0^x |p_k(t)| dt < \infty, \quad (k = 1, 2, \dots, n),$$

операция l называется *квазидифференциальной*. При этом роль класса $C_k(0, \infty)$ будет играть многообразие функций, построенное аналогично с заменой производных квазипроизводными (см. [7]). В дальнейшем для удобства изложения мы рассматриваем дифференциальную операцию, имея в виду, что все предположения и доказательства, по существу, сохраняются при переходе к операции квазидифференциальной. В предложениях настоящей главы, при надлежащих изменениях в формулировке, можно заменить принятую здесь в качестве стандартного интервала с одним сингулярным концом полуось $x \geq 0$ любым конечным или бесконечным интервалом с одним или двумя сингулярными концами.

Дифференциальная операция (1) определяет на $\dot{C}_{2n}(0, \infty)$ симметрический в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ оператор $\dot{L}$. Он называется *минимальным незамкнутым дифференциальным оператором*, определяемым операцией (1). Его замыкание L назовем *минимальным дифференциальным оператором*, определяемым операцией (1). Дефектное число этого оператора, как известно (см. [7]), удовлетворяет неравенству

$$n \leq \text{Def } L \leq 2n.$$

Любое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L будем называть *самосопряженным оператором*, порождаемым операцией l .

В силу теоремы 4 все самосопряженные операторы, порождаемые данной операцией (1), имеют один и тот же непрерывный спектр $C(\tilde{L}) = C(L)$. Более того, в силу теоремы 11, тип каждой точки из $C(\tilde{L})$ так же не зависит от выбора расширения $\tilde{L}$ оператора L . При этом случай собственного значения бесконечной кратности исключен.

Легко видеть, что всегда спектр $S(\tilde{L})$ не ограничен сверху. Для доказательства достаточно вычислить скалярное произведение $(L\varphi_m, \varphi_m)$ на пробной системе функций $\varphi_m(x) = \varphi(mx)$, $m = 1, 2, \dots$, где $\varphi(x)$ есть произвольная, отличная от тождественного нуля функция из $\dot{C}_{2n}(0, \infty)$, равная нулю вне некоторого интервала (α, β) .

Действительно, при $m \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} (\tilde{L}\varphi_m, \varphi_m) &= \int_0^\infty \sum_{k=0}^n p_k(x) |\varphi^{(n-k)}(mx)|^2 m^{2(n-k)} dx = \\ &= m^{2n-1} \int_\alpha^\beta p_0\left(\frac{t}{m}\right) |\varphi^{(n)}(t)|^2 dt + o(m^{2n-1}), \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (\tilde{L}\varphi_m, \varphi_m) = \infty$$

и утверждение доказано.

Обозначим через L_0 оператор, определенный равенством

$$L_0\varphi = L\varphi$$

на всех тех функциях $\varphi \in \mathfrak{D}_L$, которые в заданной точке $\gamma > 0$ удовлетворяют условию

$$\varphi(\gamma) = \varphi'(\gamma) = \dots = \varphi^{(2n-1)}(\gamma) = 0. \quad (2)$$

Оператор L_0 является, очевидно, ортогональной суммой минимальных дифференциальных операторов L_1 и L_γ , определяемых операцией (1) в $\mathcal{L}_2(0, \gamma)$ и $\mathcal{L}_2(\gamma, \infty)$ соответственно. Таким образом, условие (2) определяет конечномерное расщепление оператора $\tilde{L}$ по формулам

$$\tilde{L} = \tilde{L}_0, \quad L_0 = L_1 \oplus L_\gamma. \quad (3)$$

Точка γ называется *точкой расщепления* оператора L .

Так как в (3) L_1 есть регулярный дифференциальный оператор, то $C(L_1) = \emptyset$, так что

$$C(L_0) = C(L_1) \cup C(L_\gamma) = C(L_\gamma)$$

и, в силу принципа расщепления,

$$C(\tilde{L}) = C(L_\gamma). \quad (4)$$

Из равенства (4) следует, что *непрерывная часть спектра оператора $\tilde{L}$ не зависит от поведения коэффициентов дифференциальной операции (1) на конечном расстоянии.*

Расширяя L_1 и L_γ в пространствах $\mathcal{L}_2(0, \gamma)$ и $\mathcal{L}_2(\gamma, \infty)$ до самосопряженных операторов $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_\gamma$, построим самосопряженный оператор $\tilde{L}_0$ по формуле

$$\tilde{L}_0 = \tilde{L}_1 \oplus \tilde{L}_\gamma.$$

При этом данный оператор $\tilde{L}$ и оператор $\tilde{L}_0$ оказываются конечномерными расширениями одного и того же оператора L_0 . Поэтому, согласно теореме 11, типы каждой точки непрерывной части спектра операторов $\tilde{L}$ и $\tilde{L}_0$ совпадают. А так как, далее, в каждом конечном интервале оператор $\tilde{L}_1$ имеет лишь конечное число собственных значений, то тип каждой точки непрерывного спектра оператора $\tilde{L}_0$ совпадает с типом этой точки в непрерывном спектре оператора $\tilde{L}_\gamma$.

Таким образом, тип каждой точки из $C(\tilde{L})$ совпадает с типом этой точки в $C(\tilde{L}_\gamma)$ и, следовательно, *тип каждой точки непрерывной части спектра оператора $\tilde{L}$ не зависит от поведения коэффициентов операции (1) на конечном расстоянии.*

Аналогично, с ссылкой на теорему 14, устанавливается, что *ограниченность или неограниченность снизу спектра $S(\tilde{L})$ также не зависит от поведения коэффициентов на конечном расстоянии.*

8. Малые и относительно малые возмущения дифференциальных операций. Начнем с рассмотрения двучленной дифференциальной операции

$$l[y] = (-1)^n \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + q(x)y, \quad (5)$$

которая после внесения возмущения $\eta(x)$ у принимает вид

$$l_{\eta}[y] = (-1)^n \frac{d^{2n}y}{dx^{2n}} + q(x)y + \eta(x)y. \quad (6)$$

Следующая теорема устанавливает инвариантность непрерывной части спектра оператора $\tilde{L}$ по отношению к малым возмущениям.

Теорема 23 [31 (3)]. Если $\tilde{L}$ и $\tilde{L}_{\eta}$ — операторы, порожденные операциями (5) и (6) соответственно, и если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \eta(x) = 0, \quad (7)$$

то

$$C(\tilde{L}_{\eta}) = C(\tilde{L}).$$

Доказательство. Расщепляя операторы $\tilde{L}_{\eta}$ и $\tilde{L}$ в некоторой точке γ , получаем

$$\tilde{L} = \tilde{L}_0, \quad L_0 = L_1 \oplus L_{\gamma}$$

и

$$\tilde{L}_{\eta} = \tilde{L}_{\eta 0}, \quad L_{\eta 0} = L_{\eta 1} \oplus L_{\eta \gamma},$$

так что

$$C(\tilde{L}) = C(L_{\gamma}) \quad \text{и} \quad C(\tilde{L}_{\eta}) = C(L_{\eta \gamma}).$$

Выбирая точку расщепления γ так, чтобы при $x > \gamma$ было $|\eta(x)| < \delta$, и пользуясь теоремой 7, получаем, что в δ -окрестности каждой точки $\lambda \in C(\tilde{L})$ содержатся точки из $C(\tilde{L}_{\eta})$ и, наоборот, в δ -окрестности каждой точки $\lambda \in C(\tilde{L}_{\eta})$ содержатся точки из $C(\tilde{L})$. Так как множества $C(\tilde{L})$ и $C(\tilde{L}_{\eta})$ не зависят от числа $\delta > 0$, которое можно взять произвольно малым, то $C(\tilde{L}_{\eta}) = C(\tilde{L})$, что и требовалось доказать.

Утверждение о совпадении типов точек из $C(\tilde{L})$ и $C(\tilde{L}_{\eta})$ было бы здесь неправильным. Но если потребовать в дополнение к (7) выполнения при достаточно больших x неравенства $\eta(x) \geq 0$, то из теоремы 7^{bis} легко следует сохранение типа точек $C(\tilde{L})$ вида 1) п° 3 (стр. 29).

Для дифференциальной операции второго порядка вопрос о справедливости доказанной выше теоремы был впервые поставлен в [103 (1)], где при условии (7) было установлено лишь совпадение крайних левых точек множеств $C(\tilde{L})$ и $C(\tilde{L}_{\eta})$.

Примеры, иллюстрирующие применение теоремы 23, встречаются далее в п^оп^о 33 и 34.

Переходя теперь от малых возмущений к возмущениям относительно малым, будем предполагать функцию $q(x)$ полуограниченной снизу.

Следующее предложение обобщает предыдущую теорему 23 на случай относительно малых возмущений.

Теорема 24 [13 (5)]. Если $\tilde{L}$ и $\tilde{L}_\eta$ суть операторы, порождаемые операциями (5) и (6) соответственно, где $q(x) \geq \alpha > 0$ при $x \geq 0$, и если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta(x)}{q(x)} = 0,$$

то

$$C(\tilde{L}_\eta) = C(\tilde{L}).$$

Эта теорема является частным случаем следующей теоремы М. Ш. Бирмана, относящейся к случаю общей операции (1).

Теорема 25 [13 (5)]. Пусть в (1) будет $p_0(x) \equiv 1$, $p_k(x) \geq 0$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), $p_n(x) \geq \alpha > 0$ и пусть в коэффициенты $p_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) внесены возмущения*) $\eta_k(x)$ такие, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\eta_k(x)}{p_k(x)} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (8)$$

Если l_η есть операция, полученная из (1) после внесения указанных возмущений, то

$$C(\tilde{L}_\eta) = C(\tilde{L}).$$

Доказательство. Имея в виду использовать теоремы об относительно полной непрерывности, обозначим через $A = \dot{L}$ оператор, порождаемый операцией (1) на многообразии $\mathfrak{D}_L$ финитных функций из $\mathfrak{D}_L$, а через K — оператор, определяемый на этом же многообразии операцией

$$\sum_{k=1}^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \eta_k \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}.$$

*) В цитированной статье М. Ш. Бирмана [13 (5)] вместо $p_0(x) \equiv 1$ предполагалось лишь $\alpha \leq p_0(x) \leq \beta$ и в $p_0(x)$ также вносилось возмущение.

В силу теоремы 19 достаточно установить полную непрерывность оператора K относительно положительно определенного оператора A .

Так как, далее, при $f \in \mathfrak{D}_L$ будет

$$|(Kf, f)| \leq \int_0^\infty \sum_{k=1}^n |\eta_k(x)| \cdot |f^{(n-k)}(x)|^2 dx,$$

то, в силу теоремы 17, достаточно установить полную непрерывность относительно A положительного оператора K_1 , порождаемого на $\mathfrak{D}_L$ квазидифференциальной операцией

$$\sum_{k=1}^n \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} |\eta_k| \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}}.$$

Последнее, в силу теоремы 16, эквивалентно компактности в K_1 -метрике любого A -ограниченного множества из $\mathfrak{D}_L$.

Для того чтобы установить компактность данного A -ограниченного множества F функций из $\mathfrak{D}_L$, достаточно при любом $\varepsilon > 0$ построить для F в K_1 -метрике конечную ε -сеть.

Пусть при любом $f \in F$ имеет место неравенство

$$(Af, f) < M^2. \quad (9)$$

Для построения указанной ε -сети выберем, пользуясь (8), по данному δ число γ так, чтобы при $x > \gamma$ было

$$\frac{|\eta_k(x)|}{p_k(x)} < \delta^2 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Полагая

$$(K_1f, f)_\gamma = \sum_{k=1}^n \int_0^\gamma |\eta_k| \cdot |f^{(n-k)}(x)|^2 dx,$$

имеем

$$\begin{aligned} (K_1f, f) &= (K_1f, f)_\gamma + \sum_{k=1}^n \int_\gamma^\infty |\eta_k(x)| \cdot |f^{(n-k)}(x)|^2 dx < \\ &< (K_1f, f)_\gamma + \delta^2 \sum_{k=1}^n \int_\gamma^\infty p_k(x) |f^{(n-k)}(x)|^2 dx \leq \\ &\leq (K_1f, f)_\gamma + \delta^2 (Af, f) < (K_1f, f)_\gamma + M^2 \delta^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Далее, из (9) для всех $f \in F$ вытекает неравенство

$$\int_0^{\gamma} |f^{(n)}(x)|^2 dx < M. \quad (11)$$

Из этого неравенства (11) и условий

$$f^{(k)}(0) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, 2n - 1) \quad (12)$$

следуют неравенства

$$|f^{(k)}(x)| < N \quad (k = 0, 1, \dots, 2n - 1), \quad (13)$$

где число N не зависит от x и f .

Из (12) и (13) следует компактность семейства функций F в смысле равномерной сходимости вместе с производными до $(n - 2)$ -го порядка и со сходимостью в среднем квадратичном производных $(n - 1)$ -го порядка в интервале $(0, \gamma)$. Тем более семейство функций F будет компактным в метрике квадратичного функционала

$$(K_1 f, f)_{\gamma}. \quad (14)$$

Поэтому существует в F конечное множество функций R таких, что расстояние любой функции $f \in F$ от этого множества в метрике (14) будет меньше заданного числа $\delta > 0$.

Отсюда и из неравенства (10) следует, что K_1 -расстояние любой функции $f \in F$ от множества R будет меньше $\delta \sqrt{1 + 2M^2}$, и, выбирая теперь,

$$\delta < \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 + 2M^2}},$$

получаем искомую ε -сеть. Теорема доказана.

9. Пробные системы финитных функций и непрерывная часть спектра сингулярного оператора как множество точек накопления спектров регулярных операторов. Из результатов п° 2 следует, что характер спектра оператора $\tilde{L}$ связан с существованием бесконечномерных многообразий, на которых выполняется неравенство

$$\|(\tilde{L} - \lambda I)\varphi\| < \delta \|\varphi\|, \quad (15)$$

либо

$$(\tilde{L}\varphi - \lambda\varphi, \varphi) < 0. \quad (16)$$

Очевидно, выполнение неравенств (15) и (16) на двух функциях φ и ψ из $\mathfrak{D}_L$, удовлетворяющих условиям

$$(L\varphi, \psi) = 0, \quad (L\varphi, L\psi) = 0,$$

влечет выполнение этих же неравенств на линейных комбинациях этих функций. В соответствии с этим для получения пробного многообразия G достаточно построить пробную систему взаимно ортогональных функций $\{\varphi_k\}$ из $\mathfrak{D}_L$, удовлетворяющих условиям

$$(L\varphi_j, \varphi_k) = 0, \quad (L\varphi_j, L\varphi_k) = 0 \quad (j \neq k; j, k = 1, 2, \dots).$$

В качестве системы пробных функций для дифференциальных операторов естественно использовать последовательности финитных функций с непересекающимися носителями.

Такая система всегда существует, если существует бесконечномерное многообразие G , на котором выполнено (15) или (16).

Покажем это, например, для случая неравенства (15). Так как оператор $\tilde{L}$ есть конечномерное расширение оператора L , то из существования бесконечномерного многообразия $\tilde{G}$, на котором выполнено неравенство (15), следует существование бесконечномерного многообразия $G \subset \mathfrak{D}_L$, на котором также имеет место неравенство (15).

Пусть $f_1 \in G$. По построению оператора L , как замыкания оператора $\dot{L}$, можно найти финитную функцию $\varphi_1 \in \dot{C}_{2n}(0, \infty)$, настолько близкую к f_1 , чтобы для φ_1 также имело место неравенство (15).

Теперь выберем точку γ_1 правее носителя финитной функции φ_1 и расщепим оператор $\tilde{L}$ в точке $x = \gamma_1$, так что

$$\tilde{L} = \tilde{L}_0, \quad L_0 = L_1 \oplus L_{\gamma_1}.$$

Расширяя, далее, операторы L_1 и L_{γ_1} до самосопряженных операторов $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_{\gamma_1}$ в $\mathcal{L}_2(0, \gamma_1)$ и $\mathcal{L}_2(\gamma_1, \infty)$, построим оператор

$$L'_0 = \tilde{L}_1 \oplus \tilde{L}_{\gamma_1}.$$

Из неравенства (15) следует, что в интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ содержится бесконечное множество точек спектра $S(\tilde{L})$ и, следовательно, бесконечное множество точек спектра $S(L'_0)$.

Но

$$S(L'_0) = S(\tilde{L}_1) \cup S(\tilde{L}_{\gamma_1}),$$

и в каждом конечном интервале имеется лишь конечное число точек из $S(\tilde{L}_1)$, так что в интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ должно содержаться бесконечное множество точек спектра оператора $\tilde{L}_{\gamma_1}$. Отсюда, как ранее для оператора $\tilde{L}$, следует существование финитной функции $\varphi_2 \in \dot{C}_{2n}(\gamma_1, \infty)$, для которой имеет место неравенство (15). При этом носители финитных функций φ_1 и φ_2 не пересекаются.

Продолжая неограниченно начатый процесс, получим искомую последовательность пробных функций.

Условимся называть определенную для всех положительных значений t функцию $N(t)$ *возрастающей в основном монотонно*, если существует число $d \geq 0$ такое, что при любых t' и $t'' > t'$ выполняется неравенство

$$N(t'') \geq N(t') - d.$$

При $d = 0$ возрастание, монотонное в основном, сводится к обычному монотонному возрастанию.

Определим теперь при каждом $t > 0$ на интервале $(0, t)$ с помощью операции (1) и некоторых краевых условий регулярный самосопряженный оператор $\tilde{L}_t$ и обозначим его спектр через S_t . Пусть, далее, $N(t; \lambda_0, \delta)$ есть число точек спектра S_t , лежащих в интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$.

Покажем, что функция $N(t; \lambda_0, \delta)$ возрастает в основном монотонно.

Если при некотором $t = t'$ будет $N(t'; \lambda_0, \delta) = m > 2n$, то существует m -мерное подпространство $\tilde{G} \subset \mathfrak{D}_{\tilde{L}_{t'}}$, на котором

$$\|(\tilde{L}_{t'} - \lambda_0 I) f\| < \delta \|f\|, \quad (17)$$

а так как

$$\dim \mathfrak{D}_{\tilde{L}_{t'}} = 2n \pmod{\mathfrak{D}_{L_{t'}}},$$

то существует подпространство $m - 2n$ измерений $G_{t'} \subset \mathfrak{D}_{L_{t'}}$, на котором также имеет место неравенство (17). Если теперь $t'' > t'$, то, очевидно, $G_{t'} \subset \mathfrak{D}_{\tilde{L}_{t''}}$, и из (17), в силу теоремы 9^{bis}, следует неравенство

$$N(t''; \lambda_0, \delta) \geq m - 2n,$$

которое и требовалось установить.

Следующая теорема показывает, что непрерывную часть $C(\tilde{L})$ спектра самосопряженного оператора $\tilde{L}$, определяемого операцией (1) на полуоси $x \geq 0$, можно рассматривать как множество точек накопления спектров S_t операторов L_t при $t \rightarrow \infty$.

Теорема 26. *Для принадлежности точки λ_0 к $C(\tilde{L})$ необходимо и достаточно выполнение предельного соотношения*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t; \lambda_0, \delta) = \infty \quad (18)$$

при любом $\delta > 0$.

Доказательство. Если имеет место (18), то, рассуждая, как при доказательстве монотонного в основном возрастания функции $N(t; \lambda_0, \delta)$, найдем в $\mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ многообразия сколь угодно большой размерности, на которых будет

$$\|(\tilde{L} - \lambda_0 I)\varphi\| < \delta \|\varphi\|, \quad (19)$$

откуда следует бесконечность множества точек спектра $S(\tilde{L})$, лежащих в интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$. Так как число $\delta > 0$ произвольно, то отсюда следует, что $\lambda_0 \in C(\tilde{L})$. Если же, наоборот, $\lambda_0 \in C(\tilde{L})$, то при любом $\delta > 0$ существует бесконечномерное подпространство $\tilde{G} \subset \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$, на котором имеет место (19), а так как

$$\dim \mathfrak{D}_{\tilde{L}} \leq 2n \pmod{\mathfrak{D}_L},$$

то неравенство (19) выполняется и на некотором бесконечномерном многообразии $G \subset \mathfrak{D}_L$.

Каково бы ни было натуральное число m , выберем в G линейно независимую систему функций $\{f_k\}_{k=1}^m$. Так как оператор L есть замыкание оператора $\dot{L}$, определенного на $\dot{C}_{2n}(0, \infty)$, то можно заменить каждую из m функций f_k ($k = 1, 2, \dots, m$) настолько близкой финитной функцией $\varphi_k \in \mathfrak{D}_L$, чтобы система функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ была линейно независимой и на ее линейной оболочке также выполнялось неравенство (19).

Так как при достаточно большом t будет $\varphi_k \in \mathfrak{D}_{L_t}$ ($k = 1, 2, \dots, m$), то из (19) следует, что оператор $\tilde{L}_t$ имеет в интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$ не менее m собственных

значений. В силу произвольности натурального числа m теорема доказана.

Обозначим через $N(t; \mu)$ число собственных значений оператора $\tilde{L}_t$, меньших μ . Очевидно,

$$N(t; \lambda_0, \delta) = N(t; \lambda_0 + \delta) - N(t; \lambda_0 - \delta).$$

Далее, совершенно аналогично предыдущему устанавливается, что функция $N(t; \mu)$ возрастает в основном монотонно и имеет место

Теорема 27. *Для бесконечности множества точек спектра оператора $\tilde{L}$, расположенных левее точки μ , необходимо и достаточно выполнение предельного соотношения*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t, \mu) = \infty.$$

Для неограниченности снизу спектра $S(\tilde{L})$ необходимо и достаточно выполнение этого предельного соотношения при любом μ .

10. Квадратичный функционал и общие критерии дискретности отрицательной части спектра. Операция (1) порождает квадратичный функционал

$$\Phi[y] = \int_0^\infty \sum_{k=0}^n p_k(x) |y^{(n-k)}(x)|^2 dx, \quad (20)$$

который в дальнейшем рассматривается лишь на финитных функциях.

При $\varphi \in \mathfrak{D}_L$ будет

$$\Phi[\varphi] = (L\varphi, \varphi),$$

но равенство (20) определяет функционал $\Phi[y]$ на более широком многообразии, которое будет описано позже.

Из теоремы 13 вытекает следующее предложение, связывающее характер отрицательной части спектра оператора $\tilde{L}$ с множеством значений функционала (20).

Теорема 28 [31 (9)]. *Для того чтобы множество $(-\infty, 0) \cap S(\tilde{L})$ не имело отличных от нуля предельных точек, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\epsilon > 0$ существовало значение $N = N_\epsilon$, при котором*

$$\Phi_\varepsilon[y] = \int_N \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) |y^{(n-k)}(x)|^2 dx + \varepsilon \int_N |y(x)|^2 dx$$

был бы неотрицательным на всех N -финитных функциях из $\mathfrak{D}_L$.

Для того чтобы множество $(-\infty, 0) \cap S(\tilde{L})$ было конечным, необходимо и достаточно, чтобы при некотором N на всех N -финитных функциях из $\mathfrak{D}_L$ был неотрицателен функционал $\Phi[y]$.

Доказательство. Если множество $(-\infty, 0) \cap S(\tilde{L})$ не имеет отличной от нуля предельной точки, то при любом $\varepsilon > 0$ множество $(-\infty, -\varepsilon) \cap S(\tilde{L})$ конечно. Если бы для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ не существовало бы указанного в формулировке теоремы числа N , то существовала бы в $\mathfrak{D}_L$ бесконечная последовательность финитных функций с непересекающимися носителями, на которой функционал Φ_ε был бы отрицателен. Отсюда, в силу теоремы 13, следовала бы бесконечность множества $(-\infty, -\varepsilon_0) \cap S(\tilde{L})$, то есть существование у множества $(-\infty, 0) \cap S(\tilde{L})$ отличной от нуля предельной точки.

Обратно, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N_\varepsilon$ с указанным в формулировке теоремы свойством, то множество $(-\infty, \varepsilon) \cap S(\tilde{L})$ при любом $\varepsilon > 0$ конечно. Действительно, предположив, что при некотором $\varepsilon_0 > 0$ это множество бесконечно, получим, что при любом N будет бесконечным множество $(-\infty, -\varepsilon_0) \cap S(\tilde{L}_N)$. Но тогда, в силу той же теоремы 13, функционал Φ_{ε_0} не был бы неотрицательным.

Полагая в приведенных рассуждениях $\varepsilon_0 = 0$, получим доказательство второй части теоремы.

Примечание. Из доказанной теоремы 28 вытекает, что для конечности множества $(-\infty, \mu) \cap S(\tilde{L})$ необходимо и достаточно, чтобы при некотором N на всех N -финитных функциях из $\mathfrak{D}_L$ был неотрицательным функционал $\Phi[y] - \mu(y, y)$. В частности, для ограниченности снизу и дискретности всего спектра $S(\tilde{L})$ необходимо и достаточно существование указанного выше числа $N = N_\mu$ при любом, сколь угодно большом μ .

Из теоремы 28 следует также, что если при данном коэффициенте $q(x)$ спектр оператора, порождаемого операцией (5), при $n = 1$ ограничен снизу и дискретен, то таков же спектр оператора, порождаемого этой операцией при любом n . Доказательство вытекает из представления

$$(-1)^n y^{2n} + qy = \{(-1)^n y^{(2n)} + y''\} + \{-y'' + q(x)y\},$$

в правой части которого первое слагаемое определяет полуограниченный минимальный оператор (его нижняя грань $\alpha = -1$).

Возвращаясь к вопросу об области определения $\mathfrak{D}_\Phi$ функционала $\Phi[y]$, ограничимся лишь финитными функциями, равными нулю в окрестности точки $x = 0$. Из формулы (20) видно, что минимальными требованиями гладкости для любой функции y из $\mathfrak{D}_\Phi$ являются принадлежность ее классу $C_{n-1}(0, \infty)$ и существование у нее n -й производной, принадлежащей $\mathcal{L}_2(0, \infty)$. Следующая лемма показывает, что расширение функционала $\Phi[y]$ с многообразия $C_{2n}(0, \infty)$ на многообразие функций, удовлетворяющих указанным выше ослабленным требованиям гладкости, несущественно. Это означает, что эти функции вошли бы в область определения неограниченного функционала $\Phi[y]$ при его расширении по непрерывности с первоначального многообразия $\dot{C}_{2n}(0, \infty)$.

Лемма 5. [53 (3)]. *Если $z(x)$ есть финитная функция с носителем $[\alpha, \beta]$, принадлежащая классу $C_{n-1}[\alpha, \beta]$, обладающая производной $z^{(n)}(x) \in \mathcal{L}_2(\alpha, \beta)$ и удовлетворяющая $2n$ краевым условиям*

$$z^{(k)}(\alpha) = z^{(k)}(\beta) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (21)$$

то для любого $\varepsilon > 0$ существует финитная функция $y(x)$ с тем же носителем, принадлежащая классу $C_{2n}(\alpha, \beta)$ и удовлетворяющая $4n$ краевым условиям

$$y^{(k)}(\alpha) = y^{(k)}(\beta) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, 2n-1), \quad (22)$$

такая, что

$$|\Phi[z] - \Phi[y]| < \varepsilon. \quad (23)$$

Доказательство. Вместе с функционалом $\Phi[y]$ введем в рассмотрение простейший квадратичный функционал такого рода

$$F[y] = \int_{\alpha}^{\beta} |y^{(n)}(x)|^2 dx.$$

Из фундаментальности любой последовательности $\{y_j(x)\}$ функций из $C_{2n}(\alpha, \beta)$ в F -метрике следует ее фундаментальность в (вообще говоря, индефинитной) Φ -метрике, ибо при $0 \leq r < n$ имеем

$$\begin{aligned} & |y_j^{(r)}(x) - y_k^{(r)}(x)| \leq \\ & \leq \frac{1}{(n-r-1)!} \int_{\alpha}^x (x-s)^{n-r-1} |y_j^{(n)}(s) - y_k^{(n)}(s)| ds \leq \\ & \leq \frac{(\beta-\alpha)^{n-r-\frac{1}{2}}}{(n-r-1)!} \left\{ \int_{\alpha}^{\beta} |y_j^{(n)}(s) - y_k^{(n)}(s)|^2 ds \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поэтому при доказательстве теоремы можно заменить в (23) функционал Φ функционалом F .

Теперь достаточно установить, что многообразие всех функций $z(x)$, удовлетворяющих условиям леммы, является полным пространством в F -метрике и что из F -ортogonalности некоторой такой функции $z(x)$ ко всем функциям $y \in C_{2n}(\alpha, \beta)$, удовлетворяющим краевым условиям (22), следует равенство $z(x) \equiv 0$.

Переходя к доказательству указанной выше полноты, предположим, что последовательность $\{z_j(x)\}$ является F -сходящейся, так что в метрике $\mathcal{L}_2(\alpha, \beta)$ имеем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} z_j^{(n)}(x) = h(x).$$

Положим

$$z(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\alpha}^x (x-s)^{n-1} h(s) ds,$$

так что будет $z(x) \in C_{n-1}(\alpha, \beta)$, $z^{(n)}(x) \in \mathcal{L}_2(\alpha, \beta)$ и $z^{(k)}(\alpha) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Далее, в силу неравенства вида (24), будет при $0 \leq r < n$ в смысле равномерной сходимости

$$\lim_{j \rightarrow \infty} z_j^{(r)}(x) = z^{(r)}(x)$$

и, в частности,

$$z^{(r)}(\beta) = \lim_{j \rightarrow \infty} z_j^{(r)}(\beta) = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-1).$$

Таким образом, вместе с F -сходящейся последовательностью функций $\{z_j(x)\}$ предельная функция $z(x)$ удовлетворяет всем условиям леммы и F -полнота установлена.

Пусть теперь некоторая функция $z(x)$, удовлетворяющая всем условиям леммы, F -ортогональна многообразию всех функций $y(x)$ из $C_{2n}(\alpha, \beta)$, удовлетворяющих краевым условиям (22), так что

$$\int_{\alpha}^{\beta} z^{(n)}(x) \overline{y^{(n)}(x)} dx = 0.$$

Отсюда интегрированием по частям при условиях (21) получаем

$$\int_{\alpha}^{\beta} z(x) \overline{y^{(2n)}(x)} dx = 0,$$

откуда вытекает принадлежность функции $z(x)$ области определения оператора, сопряженного к оператору $2n$ -кратного дифференцирования с минимальной областью определения в $\mathcal{L}_2(\alpha, \beta)$. Поэтому функция $z(x)$ абсолютно непрерывна вместе с производными до $(n-1)$ -го порядка и в метрике $\mathcal{L}_2(\alpha, \beta)$

$$z^{(2n)}(x) = 0. \quad (25)$$

Из полученного соотношения (25) и краевых условий (22) вытекает, что $z(x) \equiv 0$. Лемма доказана полностью.

Частным случаем доказанной леммы придется воспользоваться уже в следующем пункте.

11. Принципы локализации. Так называют предложения, которые позволяют судить о спектральных свойствах сингулярного оператора L по свойствам спектров семейства $\mathcal{L}_{\Delta}$ регулярных операторов, порождаемых той же операцией (1) на любом интервале Δ фиксированной длины (в многомерном случае — в любом кубе с данной длиной ребра). Первое предложение такого рода для одномерного и многомерного операторов Шредингера было получено А. М. Молчановым в [70]. Значение принципов локализации состоит в том, что исследование некоторых свойств спектра $S(L)$ сингулярного оператора они позволяют свести к изучению соответствующего семейства регулярных операторов на фиксированном конечном интервале (соответственно — внутри фиксированного куба).

Ниже приводятся два принципа локализации для операции

$$l[y] = -y'' + q(x)y \quad (26)$$

в $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$, установленные недавно Р. С. Исмагиловым [46]. Доказательство этих принципов основано на следующей конструкции.

Обозначим через $\theta_0(x)$ какую-нибудь функцию из $C_2[-h, h]$, равную нулю при $|x| \geq h$ и удовлетворяющую соотношению

$$\theta_0^2(x) + \theta_0^2(x - h) = 1 \quad (0 \leq x \leq h). \quad (27)$$

Положим, далее,

$$\theta_k(x) = \theta_0(x - kh) \quad (k = \pm 0, 1, 2, \dots)$$

и

$$u_k(x) = y(x) \theta_k^2(x), \quad v_k(x) = y(x) \theta_k(x) \theta_{k+1}(x).$$

Очевидно, вне интервала $(k-1)h < x < (k+1)h$ будет $u_k(x) = 0$, а вне интервала $kh < x < (k+1)h$ будет $v_k(x) = 0$.

При $kh < x < (k+1)h$ имеем для любой финитной функции $y \in \mathfrak{D}_I$

$$\begin{aligned} (u'_k)^2 &= y'^2 \theta_k^4 + 4yy' \theta_k^2 \theta_k' \theta_k' + 4y^2 \theta_k^2 \theta_k'^2, \\ 2(v'_k)^2 &= 2y'^2 \theta_k^2 \theta_{k+1}^2 + 4yy' \theta_k \theta_{k+1} (\theta_k' \theta_{k+1} + \theta_k \theta_{k+1}') + \\ &\quad + 2y^2 (\theta_k' \theta_{k+1} + \theta_k \theta_{k+1}')^2, \\ (u'_{k+1})^2 &= y'^2 \theta_{k+1}^4 + 4yy' \theta_{k+1}^2 \theta_{k+1}' \theta_{k+1}' + 4y^2 \theta_{k+1}^2 \theta_{k+1}'^2, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} u_k'^2 + u_{k+1}'^2 + 2v_k'^2 &= y'^2 (\theta_k^2 + \theta_{k+1}^2)^2 + \\ &\quad + 4yy' \theta_k^2 (\theta_k \theta_k' + \theta_{k+1} \theta_{k+1}') + 4yy' \theta_{k+1}^2 (\theta_k \theta_k' + \theta_{k+1} \theta_{k+1}') + \\ &\quad + 4y^2 \theta_k^2 \theta_k'^2 + 2y^2 (\theta_k' \theta_{k+1} + \theta_k \theta_{k+1}')^2 + 4y^2 \theta_{k+1}^2 \theta_{k+1}'^2. \end{aligned} \quad (28)$$

Но поскольку

$$\theta_k^2 + \theta_{k+1}^2 = 1$$

и, следовательно,

$$\theta_k \theta_k' + \theta_{k+1} \theta_{k+1}' = 0,$$

равенство (28) принимает вид

$$\begin{aligned} u_k'^2 + u_{k+1}'^2 + 2v_k'^2 &= y'^2 + 4y^2 \theta_k^2 \theta_k'^2 + 2y^2 (\theta_k' \theta_{k+1} + \theta_k \theta_{k+1}')^2 + \\ &\quad + 4y^2 \theta_{k+1}^2 \theta_{k+1}'^2 = y'^2 - 8y^2 \theta_k \theta_k' \theta_{k+1} \theta_{k+1}' + 2y^2 (\theta_k' \theta_{k+1} + \theta_k \theta_{k+1}')^2 = \\ &= y'^2 + 2y^2 (\theta_k' \theta_{k+1} - \theta_k \theta_{k+1}')^2. \end{aligned} \quad (29)$$

Далее,

$$u_k^2 + u_{k+1}^2 + 2v_k^2 = y^2\theta_k^4 + y^2\theta_{k+1}^4 + 2y^2\theta_k^2\theta_{k+1}^2 = \\ = y^2(\theta_k^2 + \theta_{k+1}^2)^2 = y^2. \quad (30)$$

Из (29) и (30) для любой финитной функции $y \in \mathfrak{D}_L$ вытекает соотношение

$$(l[y], y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (l[u_k], u_k) + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (l[v_k], v_k) - \\ - 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{kh}^{(k+1)h} y^2 (\theta'_k \theta_{k+1} - \theta_k \theta'_{k+1})^2 dx. \quad (31)$$

Следующая лемма, основанная на тождестве (31), показывает, что если наименьшее собственное значение операции (26) на любом участке длины $2h$ конечного интервала Ω выше некоторой грани, то наименьшее собственное значение операции (26) на интервале Ω также остается выше некоторой грани, не зависящей от длины этого интервала.

Лемма 6 [46]. Пусть $\lambda(\Omega)$ есть первое собственное значение операции (26) в интервале Ω с нулевыми краевыми условиями на концах этого интервала, а $\lambda(\omega)$ имеет тот же смысл для интервала ω .

Для любого числа $|\omega| > 0$, меньшего длины интервала Ω , найдется такой интервал $\omega \subset \Omega$ длины $|\omega|$, для которого будет

$$\lambda(\omega) < \lambda(\Omega) + \frac{32}{|\omega|^2}. \quad (32)$$

Доказательство вытекает из тождества (31), если подчинить функцию $\theta_0(x)$ дополнительному требованию

$$|\theta'_0(x)| < \frac{1}{h},$$

совместимому с (27), положить $2h = |\omega|$, считать носитель финитной функции $y(x)$ лежащим внутри Ω и воспользоваться экстремальным свойством первого собственного значения, учитывая при этом лемму 5 о сглаживании.

Действительно, тождество (31) дает

$$(l[y], y) \geq \sum_{k=-\infty}^{\infty} (l[u_k], u_k) + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (l[v_k], v_k) - \frac{32}{|\omega|^2} (y, y), \quad (33)$$

но в силу (30) будет

$$(y, y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (u_k, u_k) + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} (v_k, v_k). \quad (34)$$

Выбирая теперь функцию $y(x)$ так, чтобы при некотором $\delta > 0$ было

$$(Ly, y) < [\lambda(\Omega) + \delta](y, y),$$

получаем из (33) и (34) неравенство

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{(l[u_k], u_k) - \alpha(u_k, u_k)\} + \\ + 2 \sum_{k=-\infty}^{\infty} \{(l[v_k], v_k) - \alpha(v_k, v_k)\} < 0, \end{aligned} \quad (35)$$

где

$$\alpha = \lambda(\Omega) + \delta + \frac{32}{|\omega|^2}.$$

Так как хотя бы одно из слагаемых под знаком первой или второй суммы в левой части соотношения (35) должно быть отрицательным, а число $\delta > 0$ может быть взято произвольно малым, то лемма доказана.

Из леммы 6 легко вывести принципы локализации, выражаемые теоремами 29 и 30.

Теорема 29 [46]. Для полуограниченности оператора L , порождаемого операцией (26) в $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы множество чисел $\lambda(\omega)$ было ограничено снизу, когда ω пробегает совокупность всех отрезков фиксированной длины.

Доказательство. Если оператор L ограничен снизу числом $\alpha > -\infty$, то функционал $(Ly, y) - \alpha(y, y)$ должен быть неотрицательным на всех функциях $y \in \mathfrak{D}_L$ и, в частности, на финитных функциях с носителем ω , откуда вытекает неравенство $\lambda(\omega) > \alpha$.

Если, обратно, $\lambda(\omega) > \alpha > -\infty$ для всех ω , то для любой финитной функции $y \in \mathfrak{D}_L$ с произвольным носителем Ω будет, в силу леммы 6, $(Ly, y) > \alpha - \frac{32}{|\omega|^2}$, так что оператор L оказывается полуограниченным.

Теорема 30 [46]. Для полуограниченности и дискретности спектра оператора L необходимо и достаточно, чтобы величина $\lambda(\omega)$ стремилась к бесконечности,

когда отрезок ω уходит в бесконечность, сохраняя свою длину.

Доказательство. Пусть спектр $S(L)$ полуограничен и дискретен. Тогда при любом заданном $\mu > 0$ найдется такая точка расщепления $N = N_\mu$, что на всех N -финитных функциях из $\mathfrak{D}_L$ будет $(L_N u, u) > \mu (u, u)$, ибо в противном случае можно было бы построить бесконечную последовательность финитных функций с непересекающимися носителями, на которых было бы $(L u, u) < \mu (u, u)$, так что было бы $S(L) \cap (-\infty, \mu) \neq \emptyset$. Таким образом, для всех интервалов ω , расположенных правее точки $N = N_\mu$, будет $\lambda(\omega) > \mu$, и необходимость сформулированного условия доказана.

Если, наоборот, при произвольно заданном $\mu > 0$ для всех интервалов ω , лежащих правее точки $N = N_\mu$, будет $\lambda(\omega) > \mu$, то в силу леммы 6 для всех N -финитных функций из $\mathfrak{D}_L$ будет

$$(L_N u, u) > \left(\mu - \frac{32}{|\omega|^2} \right) (u, u).$$

Из этого неравенства следует, что

$$S(L_N) \cap \left(-\infty, \mu - \frac{32}{|\omega|^2} \right) = \emptyset$$

и в силу принципа расщепления также

$$S(L) \cap \left(-\infty, \mu - \frac{32}{|\omega|^2} \right) = \emptyset,$$

откуда при $\mu \rightarrow \infty$ получаем $S(L) = \emptyset$, что и требовалось доказать.

12. Отрицательная часть спектра и осцилляторные свойства дифференциальных операций. При $n = 1$ между осцилляционными свойствами решений дифференциального уравнения

$$l[y] = \lambda y \tag{36}$$

и спектром любого самосопряженного оператора $\tilde{L}$, порождаемого операцией (1), существует известная связь, в силу которой множество точек спектра оператора $\tilde{L}$, предшествующих точке λ_0 , будет конечным или бесконечным в зависимости от того, будет ли при $\lambda = \lambda_0$ уравнение (36) неосцилляторным или осцилляторным (то есть будет ли каждое его

решение иметь конечное или бесконечное число нулей). Переходя к любому значению n , отметим, что произвольные постоянные общего решения дифференциального уравнения $2n$ -го порядка (36) можно всегда выбрать так, чтобы это решение имело нули в заданных $2n - 1$ точках, но, очевидно, не всегда найдется решение, имеющее нули в заданных $2n$ точках и, в частности, имеющее n -кратные нули в двух заданных точках. Принимаемое ниже определение осцилляторности таково, что при переходе от $n = 1$ к любому значению n указанная выше связь осцилляторности со свойствами спектра сохраняется.

Назовем дифференциальное уравнение $2n$ -го порядка (36) *осцилляторным*, если при любом t найдется решение этого уравнения, имеющее правее точки t более одного n -кратного нуля. В противном случае уравнение (36) назовем *неосцилляторным*. Этой же терминологией будем пользоваться и в отношении самой операции $l[y]$.

При $n = 1$ данное выше определение совпадает с общепринятым. Действительно, если уравнение второго порядка (36) осцилляторно в смысле приведенного определения, то существует стремящаяся к бесконечности последовательность точек $\alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots$, такая, что для каждого интервала $[\alpha_k, \beta_k]$ существует решение уравнения (36), обращающееся в нуль на его концах. В силу известной теоремы о перемежаемости нулей любое решение дифференциального уравнения второго порядка будет иметь корень в каждом из интервалов $[\alpha_k, \beta_k]$, то есть будет иметь бесконечное число нулей.

Теорема 31 [31 (9)]. *Для осцилляторности уравнения $2n$ -го порядка (36) при $\lambda = \lambda_0$ необходимо и достаточно, чтобы часть спектра оператора $\tilde{L}$, лежащая левее точки $\lambda = \lambda_0$, была бесконечным множеством.*

Доказательство. Положим, не ограничивая общности, $\lambda_0 = 0$. Если уравнение (36) осцилляторно при $\lambda = 0$, то при $x = t_1$ существует решение $y_1(x)$ уравнения (26), имеющее n -кратные нули в точках α и β , где $\beta > \alpha > t_1$. Функцию $y_1(x)$ в интервале $[\alpha, \beta]$ можно рассматривать как соответствующую собственному значению $\lambda = 0$ собственную функцию краевой задачи, определяемой операцией l и условиями

$$y^{(k)}(\alpha) = y^{(k)}(\beta) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n - 1).$$

Положим $\alpha_1 = \alpha$, и пусть β_1 есть любое число, большее β .

Из вариационных принципов следует, что задача с той же дифференциальной операцией l и краевыми условиями

$$y^{(k)}(\alpha_1) = y^{(k)}(\beta_1) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

должна иметь отрицательное собственное значение $\lambda_1 < 0$.

Пусть соответствующая собственная функция есть $f_1(x)$. Эта функция имеет n -кратные нули в точках α_1, β_1 и

$$\Phi[f_1] = \lambda_1(f_1, f_1) < 0.$$

Применяя лемму 5 п° 10, найдем финитную функцию $\varphi_1 \in \mathfrak{D}_L$ с тем же носителем $[\alpha_1, \beta_1]$, для которой также будет

$$(L\varphi_1, \varphi_1) = \Phi[\varphi_1] < 0.$$

Выбирая теперь $t_2 > \beta_1$ и продолжая неограниченно начатое построение, найдем бесконечную последовательность финитных функций $\varphi_k \in \mathfrak{D}_L$ с непересекающимися носителями, удовлетворяющих неравенству

$$(L\varphi_k, \varphi_k) < 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отсюда, в силу теоремы 13, следует, что отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ есть бесконечное множество.

Если, обратно, множество $(-\infty, 0) \cap S(\tilde{L})$ бесконечно, то при любом $\gamma > 0$ отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}_\gamma$ также бесконечна. Отсюда, в силу теоремы 27, следует, что при достаточно большом $\beta > \gamma$ регулярный оператор $\tilde{L}_{\gamma, \beta}$, порождаемый операцией (1) на интервале $[\gamma, \beta]$, будет иметь достаточно много отрицательных собственных значений.

Пусть теперь t есть любое положительное число и требуется доказать, что при $\lambda = 0$ существует решение уравнения (36), имеющее правее точки t два n -кратных нуля.

Выберем произвольно $\alpha_1 > t$ и найдем число $\beta > \alpha_1$ такое, чтобы оператор $\tilde{L}_{\alpha_1, \beta}$ имел по крайней мере одно отрицательное собственное значение $\lambda(\beta)$. При убывании β собственное значение $\lambda(\beta)$ неограниченно возрастает, изменяясь непрерывно. Поэтому существует такое значение β_1 ($\alpha_1 < \beta_1 < \beta$), при котором $\lambda(\beta_1) = 0$.

Таким образом, краевая задача, определяемая операцией (1) и условиями

$$y^{(k)}(\alpha_1) = y^{(k)}(\beta_1) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1),$$

имеет собственное значение $\lambda = 0$. Соответствующая этому значению собственная функция и является искомым решением дифференциального уравнения (36) при $\lambda = 0$, так как эта функция имеет n -кратные нули в точках α_1 и β_1 .

Из приведенного доказательства следует, что в случае осцилляторности дифференциальной операции l первый из n -кратных нулей, указанных в определении осцилляторности, можно задать произвольно.

Из теоремы 31 следует также, что если уравнение (36) осцилляторно при $\lambda = \lambda_0$, то оно тем более осцилляторно при $\lambda > \lambda_0$.

Для каждой операции l имеет место один из трех случаев: либо при всех λ она неосцилляторна, либо при всех λ она осцилляторна, либо существует значение $\lambda = \lambda_0$ такое, что при $\lambda < \lambda_0$ операция l неосцилляторна, а при $\lambda > \lambda_0$ она осцилляторна. В последнем случае при $\lambda = \lambda_0$ операция l может оказаться неосцилляторной или осцилляторной.

Из теоремы 31 также следует, что если операция (1) неосцилляторна при данном λ , то операция с бóльшими коэффициентами тем более неосцилляторна при этом значении λ .

Наконец, из теоремы 31 следует выпуклость множества всех неосцилляторных операций данного порядка со старшим коэффициентом, равным единице. Последнее означает, что из неосцилляторности уравнений

$$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} p_k^*(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0$$

и

$$(-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} p_k^{**}(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0$$

следует неосцилляторность уравнения

$$\begin{aligned} & (-1)^n y^{(2n)} + \sum_{k=1}^n (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \times \\ & \times [\mu^{**} p_k^*(x) + \mu^* p_k^{**}(x)] \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0 \end{aligned}$$

при любых положительных μ^* и μ^{**} , связанных равенством $\mu^* + \mu^{**} = 1$. При $n = 1$ в случае периодической функции $q(x)$

это свойство впервые установил Н. Адамов [1] с помощью перехода к соответствующему уравнению Риккати.

В заключение приведем другое определение осцилляторности, эквивалентное принятому в начале этого пункта. Это второе определение ближе к обычному определению осцилляторности для дифференциального уравнения второго порядка в том отношении, что оно означает наличие бесконечной последовательности нулей у некоторой функции $D(x; \lambda)$, построенной с помощью решений уравнения (36). При $n = 1$ эта функция $D(x; \lambda)$ сама является решением дифференциального уравнения.

Для построения функции $D(x; \lambda)$ при данном n введем n -мерное линейное многообразие G решений уравнения (36), удовлетворяющих при $x = 0$ условиям

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} y^{(k-1)}(0) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (37)$$

где прямоугольная вещественная матрица

$$(\alpha_{jk}) \quad (j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, 2n)$$

такова, что условия (37) вместе с условиями

$$y^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1) \quad (38)$$

определяют самосопряженное расширение оператора, порождаемого операцией (1) в $\mathcal{L}_2(0, a)$. Выбирая в G произвольно базис

$$\varphi_1(x; \lambda), \varphi_2(x; \lambda), \dots, \varphi_n(x; \lambda), \quad (39)$$

положим

$$D(x; \lambda) = \text{Det} \left(\varphi_j^{(k-1)}(x; \lambda) \right)_{j, k=1}^n \quad (40)$$

и обозначим через $r_1, r_2, \dots, r_m$ кратности последовательных нулей $x_1 < x_2 < \dots < x_m$ этого вронскиана $D(x; \lambda)$, лежащих в интервале $(0, a)$. Очевидно, функция $D(x; \lambda)$ в существенном определяется самим подпространством G , так как изменение базиса (39) может привести лишь к умножению (40) на постоянный, отличный от нуля множитель.

Согласно одной теореме М. Г. Крейна [53 (1)], число ν собственных значений краевой задачи (37), (38), лежащих левее точки λ , удовлетворяет неравенству

$$m \leq \nu \leq \sum_{j=1}^m \sqrt{r_j}. \quad (41)$$

Здесь числа m , ν и r_j зависят от a , так что $m = m(a)$, $\nu = \nu(a)$, $r_j = r_j(\bar{a})$.

Если теперь уравнение (36) при данном значении λ осцилляторно в смысле первого определения, то из теоремы 31 следует, что левее точки λ имеется бесконечное множество точек спектра оператора $\tilde{L}$, порождаемого в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ операцией (1). Отсюда на

основании теоремы 27 заключаем, что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \nu(a) = \infty, \quad (42)$$

но тогда из неравенства (41) вытекает, что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{m(a)} \sqrt{r_j(a)} = \infty,$$

так что

$$\lim_{a \rightarrow \infty} m(a) = \infty, \quad (43)$$

то есть функция $D(x; \lambda)$ имеет бесконечную последовательность нулей на полуоси $x > 0$.

Если, наоборот, функция $D(x; \lambda)$ имеет бесконечную последовательность нулей на полуоси $x > 0$, то есть имеет место (43), то из неравенства (41) следует (42). Отсюда на основании теоремы 28 заключаем о бесконечности множества собственных значений оператора $\tilde{L}$ в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$, расположенных левее точки λ , откуда в силу теоремы 31 следует осцилляторность уравнения (36).

Из приведенных рассуждений вытекает альтернатива: вне зависимости от выбора условий (37) функция $D(x; \lambda)$ либо имеет при $x > 0$ бесконечное множество нулей, либо имеет при $x > 0$ лишь конечное число нулей.

В соответствии с изложенным выше, можно дать следующее, эквивалентное ранее принятому, определение осцилляторности: уравнение $2n$ -го порядка (36) называется осцилляторным, если некоторый (а значит, и любой другой) вронскиан n -го порядка (40) имеет бесконечную последовательность положительных корней, в противном случае (когда любой вронскиан (40) имеет лишь конечное число положительных корней) уравнение (36) называется неосцилляторным.

В связи с последним определением осцилляторности см. также н° 44, теорему 14.

13. О дифференциальных операциях над вектор-функциями. Дифференциальная операция над вектор-функциями определяется равенством

$$l = \sum_{r=0}^n (-1)^{n-r} \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}} P_r(x) \frac{d^{n-r}}{dx^{n-r}}, \quad (44)$$

где коэффициенты $P_r(x) = \|p_{r; j, k}(x)\|_{j, k=1}^m$ ($m < \infty$) предполагаются $n - r$ раз непрерывно дифференцируемыми эрмитовыми матрицами, а матрица $P_0(x)$, сверх того, предполагается еще положительно определенной при $x \geq 0$.

Обозначим через $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ гильбертово пространство m -компонентных вектор-функций $\varphi(x) = \{\varphi_k(x)\}_{k=1}^m$ со

скалярным произведением

$$(\varphi, \psi) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^m \varphi_k(x) \overline{\psi_k(x)} dx.$$

Операция l определяет на многообразии $C_{2n}(0, \infty)$ всех $2n$ -кратно непрерывно дифференцируемых финитных вектор-функций, равных нулю вблизи точки $x = 0$, симметрический в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ оператор $\tilde{L}$, замыкание которого обозначим через L .

Так как любое самосопряженное расширение $\tilde{L}$ оператора L , порождаемого операцией (44), конечномерно, а именно $\dim \mathfrak{D}_{\tilde{L}} \leq 2mn \pmod{\mathfrak{D}_L}$, то все результаты п° п° 7, 9, 10, 12 непосредственно переносятся на дифференциальные операции вида (44) над вектор-функциями.

Квадратичный функционал, соответствующий операции (44), имеет вид

$$\Phi[y] = \int_0^\infty \left\{ \sum_{r=0}^n \sum_{j,k=1}^m p_{r;j,k}(x) y_j^{(n-r)}(x) \overline{y_k^{(n-r)}(x)} \right\} dx.$$

Операция (44) называется *осцилляторной*, если при любом t найдется решение уравнения

$$l[y] = \lambda y, \quad (45)$$

имеющее правее точки t более одного n -кратного нуля, в противном случае операция (44) называется *неосцилляторной*.

В случае, когда все матрицы $P_r(x)$ ($r = 1, 2, \dots, m$) диагональны, уравнение (45) распадается на систему m дифференциальных уравнений $2n$ -го порядка

$$l_r[y_r] = \lambda y_r \quad (r = 1, 2, \dots, m)$$

вида (36) относительно каждой из компонент вектор-функций $y(x)$. При этом векторная операция (44) будет осцилляторной при $\lambda = \lambda_0$, если осцилляторна хотя бы одна из скалярных операций l_r при этом значении λ , и будет неосцилляторной при $\lambda = \lambda_0$, если все операции l_r ($r = 1, 2, \dots, m$) для этого λ неосцилляторны.

Как установил В. А. Якубович (см. [111(3)]), рассмотренное в этом пункте определение осцилляторности эквивалентно соответствующим определениям теории канонических систем дифференциальных уравнений.

14. Конечноразностный аналог одномерного самосопряженного сингулярного дифференциального оператора. Дискретным аналогом дифференциальной операции второго порядка на полуоси $x \geq 0$ с краевым условием вида $y'(0) = = hy(0)$ является конечноразностная операция

$$t[y_k] = \alpha_{k+1}y_{k+1} + \beta_k y_k + \alpha_k y_{k-1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad (46)$$

где $y_{-1} = 0$.

Везде в дальнейшем будем считать все числа α_k положительными, а числа β_k — произвольными вещественными.

Если ввести векторы

$$y = \{y_k\}_{k=0}^{\infty} \text{ и } z = \{\alpha_{k+1}y_{k+1} + \beta_k y_k + \alpha_k y_{k-1}\}_{k=0}^{\infty},$$

то операцию (46) можно представить в матричном виде с помощью равенств

$$z = t[y],$$

$$t = \begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_1 & 0 & 0 & \cdot \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & 0 & \cdot \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \alpha_3 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad (\alpha_k > 0). \quad (47)$$

Матрица Якоби (47) определяет на многообразии всех *финитных* векторов (то есть векторов с конечным числом отличных от нуля координат) пространства l_2 симметрический оператор $\dot{L}$, замыкание которого обозначим через $\bar{L}$. В отличие от дифференциального оператора, оператор $\bar{L}$ будет ограниченным, если ограничены коэффициенты операции (46), то есть элементы матрицы (47), и при этом $\|\bar{L}\| \leq \leq \sup |\beta_k| + 2\sup \alpha_k$ [6 (2)].

Дискретным аналогом одномерного дифференциального оператора любого порядка $2n$ оказалась бы обобщенная матрица Якоби, то есть бесконечная симметрическая матрица (a_{jk}) , для которой $a_{jk} = 0$ при $|j - k| > n$.

Любое самосопряженное расширение оператора $\bar{L}$, определяемого матрицей (47), конечномерно, так как $\text{Def } \bar{L} \leq 1$. Поэтому спектр $S(\bar{L})$ и тип каждой точки из $S(\bar{L})$ не зависят от выбора расширения. Равным образом не зависит от расширения неограниченность спектра снизу и сверху.

Обозначая через $\bar{L}_0$ оператор, определяемый равенством $\bar{L}_0 y = \bar{L} y$ на всех векторах $y \in \mathfrak{D}_{\bar{L}}$, удовлетворяющих при заданном натуральном γ условию $y_\gamma = y_{\gamma+1} = 0$, получаем

конечномерное расщепление оператора $\tilde{L}$ по формулам

$$\tilde{L} = \tilde{L}_0, \quad \tilde{L}_0 = L_1 \oplus L_\gamma,$$

где L_1 и L_γ — операторы, индуцируемые оператором L_0 в подпространствах векторов $y = \{y_k\}_{k=0}^\infty$ из l_2 , удовлетворяющих условиям $y_k = 0$ при $k \geq \gamma + 1$ и $y_k = 0$ при $k \leq \gamma$ соответственно.

Из принципа расщепления следует, что спектр $C(\tilde{L})$ не зависит от значений конечного числа элементов матрицы (47), и более того: если t_1 и t_2 — две матрицы вида (47) такие, что элементы матрицы $t_2 - t_1$ стремятся к нулю, то $C(\tilde{L}_1) = C(\tilde{L}_2)$. Впрочем, в данном случае эти утверждения непосредственно следуют из теоремы 8 Г. Вейля, так как при указанном условии оператор $L_2 - L_1$ будет вполне непрерывным.

Из принципа расщепления также следует, что тип каждой точки непрерывной части спектра $C(\tilde{L})$, а также неограниченность спектра $S(\tilde{L})$ снизу и сверху не зависят от значений конечного числа элементов матрицы (47).

Вводя функции целочисленного переменного $N(m; \lambda_0, \delta)$, $N_1(m; \mu)$ и $N_2(m; \mu)$ для числа собственных значений квадратной матрицы m -го порядка

$$\begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_1 & 0 & \cdot & \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ & & & \cdot & \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \alpha_{m-1}\beta_{m-1} \end{pmatrix}, \quad (48)$$

лежащих соответственно в интервале $(\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta)$, на полуоси $(-\infty, \mu)$ и на полуоси $(\mu, +\infty)$, так же как и в $n^\circ 9$, получим, что эти функции возрастают в основном монотонно и имеют место теоремы, аналогичные теоремам 26 и 27.

Остановимся еще на осцилляционных свойствах решения конечноразностного уравнения второго порядка

$$-\alpha_{k+1}y_{k+1} - \alpha_k y_{k-1} + \beta_k y_k = \lambda y_k \\ (y_{-1} = 0; k = 0, 1, 2, \dots), \quad (49)$$

которое с точностью до постоянного множителя определяется однозначно.

Назовем решение $y = \{y_k\}_{k=0}^\infty$ уравнения (49) осцилляционным, а само уравнение (49) осцилляторным, если в по-

следовательности координат y_k ($k = 0, 1, \dots$) имеется бесконечное число знакоперемен. В противном случае назовем решение неосцилляционным, а уравнение—неосцилляторным.

Теорема 32. Для того, чтобы уравнение (49) было осцилляторным при $\lambda = \lambda_0$, необходимо и достаточно, чтобы часть спектра $S(\tilde{L})$, расположенная левее точки λ_0 , была бесконечным множеством.

Доказательство. Положим, не ограничивая общности, $\lambda_0 = 0$. Если множество $(-\infty, 0) \cap S(\tilde{L})$ бесконечно, то при произвольно заданном N существует левый верхний угол матрицы (47) вида (48), имеющий не менее N отрицательных собственных значений. А так как, согласно теореме Якоби — Сильвестра, число отрицательных собственных значений матрицы (48) равно числу знакоперемен в последовательности $(\zeta_k)_{k=0}^m$ ($\zeta_0 = 1$) главных миноров матрицы (48), то число знакоперемен в последовательности $\{\zeta_k\}_{k=0}^\infty$ всех главных миноров матрицы (47) бесконечно.

С другой стороны (см., например, [26]), раскрывая определитель ζ_{k+1} по элементам последней строки, получаем равенство

$$\zeta_{k+1} = \beta_k \zeta_k - \alpha_k^2 \zeta_{k-1} \quad (k = 2, 3, \dots), \quad (50)$$

или, полагая

$$y_k = (\alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_1)^{-1} \zeta_k \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (51)$$

равенство

$$\begin{aligned} (-1)^{k+1} \alpha_{k+1} \alpha_k \dots \alpha_1 y_{k+1} &= \\ &= (-1)^k \beta_k \alpha_k \alpha_{k-1} \dots \alpha_1 y_k + (-1)^k \alpha_k^2 \alpha_{k-1} \dots \alpha_1 y_{k-1} \end{aligned}$$

или, наконец,

$$-\alpha_{k+1} y_{k+1} - \alpha_k y_{k-1} + \beta_k y_k = 0.$$

Полагая, далее,

$$y_0 = 1, \quad (52)$$

непосредственно убеждаемся в справедливости равенств

$$\begin{aligned} -\alpha_2 y_2 - \alpha_1 y_0 + \beta_1 y_1 &= 0, \\ -\alpha_1 y_1 + \beta_0 y_0 &= 0, \end{aligned}$$

так что последовательность $\{y_k\}_{k=0}^\infty$, определенная равенствами (51), (52), является решением уравнения (49) при $\lambda = 0$.

Так как $y_k \zeta_k \geq 0$, то решение $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ имеет бесконечное число нулей, и первая часть теоремы доказана.

Обратно, если решение $\{y_k\}_{k=0}^{\infty}$ уравнения (49) при $\lambda = 0$ осциллиционно, то из равенства (51) вытекает, что в последовательности главных миноров $\{\zeta_k\}_{k=1}^{\infty}$ имеется бесконечное число знакоперемен. Снова используя теорему Якоби — Сильвестра, получаем, что при $m \rightarrow \infty$ будет $N_1(m; 0) \rightarrow \infty$, откуда следует бесконечность множества точек отрицательной части спектра оператора $\tilde{L}$, что и требовалось доказать.

Если в (49) отбросить уравнение, соответствующее значению $k = 0$, которое играет роль краевого условия, то полученное конечноразностное уравнение второго порядка будет иметь два линейно независимых решения. Так как бесконечность множества $(-\infty, 0) \cap S(\tilde{L})$ не зависит от значений конечного числа элементов матрицы (47), то из теоремы 32, в частности, следует, что если одно из решений конечноразностного уравнения второго порядка (49) имеет бесконечное число знакоперемен, то этим же свойством обладает любое другое решение этого уравнения.

Некоторые новые результаты относительно спектра якобиевых матриц будут освещены далее, в п° п° 37 и 67.

§ 3. Многомерные самосопряженные дифференциальные операторы

15. Включение многомерных краевых задач в общую теорию симметрических операторов. В случае многомерной краевой задачи простейшая дифференциальная операция второго порядка имеет вид

$$l[u] = -\Delta u + q(P)u, \quad (1)$$

где функция $q(P)$, называемая потенциалом, предполагается непрерывной в рассматриваемой ограниченной или неограниченной области*) Ω m -мерного эвклидова пространства $\mathbb{E}_m$

*) Здесь и далее не оговариваются явно ограничения, накладываемые на рассматриваемые в книге области и их границы. Мы считаем, что эти ограничения обеспечивают выполнимость дальнейших построений, связанных с продолжением функций за границу области их определения. Кроме этого, указанные ограничения должны быть достаточны для корректности встречающихся в книге классических краевых задач.

(в частности, может быть $\Omega = \mathbb{E}_m$). При $m = 3$ вместо $\mathbb{E}_3$ будем писать $\mathbb{E}$. Расстояние между двумя точками P и Q пространства $\mathbb{E}_m$ будем обозначать через $|PQ|$ или $r(P, Q)$.

Ограничиваясь в этом и ближайших пунктах функциями трех переменных, введем гильбертово пространство $\mathcal{L}_2(\Omega)$ комплекснозначных функций точки, измеримых и имеющих суммируемый квадрат модуля в области Ω со скалярным произведением

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(Q) \overline{v(Q)} d\omega. \quad (2)$$

Операцию (1) будем называть *регулярной*, если область Ω ограничена и функция $q(P)$ непрерывна вплоть до границы этой области. Если же хотя бы одно из этих двух условий не имеет места, то операцию (1) назовем *сингулярной*.

Функцию $u(P)$ будем называть *финитной в области Ω* , если она тождественно равна нулю вне некоторой ограниченной области, целиком лежащей внутри Ω . Наименьшую замкнутую область, вне которой данная финитная функция тождественно равна нулю, назовем ее *носителем*.

Включение многомерной краевой задачи в общую теорию симметрических операторов начнем с построения минимального оператора L , определяемого операцией (1), и сопряженного оператора L^* .

Минимальным дифференциальным оператором, определяемым операцией (1) в области Ω , назовем замыкание L симметрического в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ оператора $\dot{L}$, определяемого операцией (1) на многообразии всех дважды непрерывно дифференцируемых финитных в Ω функций.

Для построения оператора L^* [31 (5)] введем сначала многообразие функций, «потенциальных» в области Ω , которое аналогично многообразию функций одного переменного, имеющих в данном интервале абсолютно непрерывную первую производную.

Функцию $u(P)$ назовем *потенциальной* в области Ω , если в каждой ограниченной области $\omega \subset \Omega$ она допускает представление

$$u(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{h(Q)}{r(P, Q)} d\omega_Q + \gamma(P) \quad (P \in \omega), \quad (3)$$

где $h(Q) \in \mathcal{L}_2(\omega)$, а $\gamma(P)$ есть гармоническая в ω функция, принадлежащая $\mathcal{L}_2(\omega)$.

Здесь и далее на протяжении п° п° 15—20 условимся считать, что соотношение $\omega_1 \subset \omega_2$ между двумя областями ω_1 и ω_2 означает, что область ω_1 ограничена и лежит целиком внутри ω_2 . Если функция $u(P)$ дважды непрерывно дифференцируема в области Ω , то, выбирая для любой области $\omega \subset \Omega$ область ω' , удовлетворяющую соотношению $\omega \subset \omega' \subset \Omega$, можем представить функцию $u(P)$ внутри ω' в виде суммы трех слагаемых

$$u(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{h(Q)}{r(P, Q)} d\omega_Q + \gamma_1(P) + \gamma_2(P)$$

с непрерывной вплоть до границы области ω' плотностью объемных масс $h(Q)$, откуда, полагая при $P \in \omega$

$$\gamma(P) = \gamma_1(P) + \gamma_2(P) - \frac{1}{4\pi} \int_{(\omega' - \omega)} \frac{h(Q)}{r(P, Q)} d\omega_Q,$$

получаем представление (3).

Таким образом, любая дважды непрерывно дифференцируемая в области Ω функция является потенциальной, но потенциальная функция, будучи в силу представления (3) непрерывной, не является, вообще говоря, дважды непрерывно дифференцируемой. Из представления (3) следует, что в случае непрерывного распределения масс $h(Q)$ потенциальная функция будет обладать лишь непрерывными частными производными первого порядка.

Множество всех потенциальных функций является, очевидно, линейным.

Для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(P)$ имеет место представление (3), в котором

$$\Delta u(P) = h(P). \quad (4)$$

Следующая лемма позволяет расширить операцию Δ на многообразие всех потенциальных в Ω функций с помощью равенств (3), (4).

Лемма 7. 1°. Если функция $u(P)$ потенциальна в области Ω , то для фиксированной области $\omega \subset \Omega$ компоненты $h(P)$ и $\gamma(P)$ функции $u(P)$ определяются представлением (3) однозначно.

2°. Изменение области ω не ведет к изменению значений функции $h(P)$ в точках области ω .

Доказательство. Предполагая существование двух представлений (3) для одной и той же функции, получим

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{g(Q)}{r(P, Q)} d\omega_Q + \vartheta(P) = 0,$$

и для доказательства первой части леммы достаточно установить, что $g(Q) = 0$.

Построим последовательность непрерывно дифференцируемых в ω функций $g_k(Q)$, сходящуюся в $\mathcal{L}_2(\omega)$ к $g(Q)$, и положим

$$u_k(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{g_k(Q)}{r(P, Q)} d\omega_Q + \vartheta(P). \quad (5)$$

Так как первое слагаемое в (5) представляет собой значение на функции $g_k(Q)$ ограниченного в $\mathcal{L}_2(\omega)$ оператора, то $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$ в метрике $\mathcal{L}_2(\omega)$.

Далее, для любой дважды непрерывно дифференцируемой финитной в ω функции $v(P)$ имеем

$$(v, g) = \lim_{k \rightarrow \infty} (v, g_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (v, \Delta u_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\Delta v, u_k) = 0. \quad (6)$$

Так как многообразие всех дважды непрерывно дифференцируемых финитных в ω функций плотно в $\mathcal{L}_2(\omega)$, то из (6) следует, что $g = 0$ в $\mathcal{L}_2(\omega)$, вопреки предположению.

Переходя к доказательству второй части леммы, предположим, что представление (3) имеет место при $\omega = \omega_j$, $h = h_j$, $\gamma = \gamma_j$ ($j = 1, 2$). Присоединяя в этих двух представлениях интегралы по $\omega_1 - (\omega_1 \cap \omega_2)$ и $\omega_2 - (\omega_2 \cap \omega_1)$ к γ_1 и γ_2 соответственно, получим, в силу уже доказанной первой части леммы, равенство $g_1(P) = g_2(P)$ при $P \in \omega_1 \cap \omega_2$, что и требовалось доказать.

Согласно лемме 1, любой потенциальной в Ω функции $u(P)$ соответствует в представлении (3) единственная функция $h(P)$, определенная в Ω и принадлежащая $\mathcal{L}_2(\omega)$ при любой $\omega \subset \Omega$. Расширяя операцию Δ , положим для любой потенциальной в Ω функции

$$\Delta u(P) = h(P)$$

и перейдем к характеристике оператора L^* .

Теорема 33. Оператор L^* определяется операцией (1) на многообразии всех потенциальных

в Ω функций $u(P)$ из $\mathcal{L}_2(\Omega)$, для которых также $l[u] \in \mathcal{L}_2(\Omega)$.

Доказательство (см. [31 (5)]). Обозначим оператор, определяемый операцией (1) на многообразии всех потенциальных в Ω функций v из $\mathcal{L}_2(\Omega)$, для которых $l[v] \in \mathcal{L}_2(\Omega)$, через M и покажем, что $L^* = M$.

Пусть сначала $v \in \mathfrak{D}_M$, а $u(P)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая и финитная в Ω функция.

Имеем

$$\begin{aligned} (l[u], v) &= -(\Delta u, v) + (qu, v) = -\lim_{k \rightarrow \infty} (\Delta u, v_k) + (u, qv) = \\ &= -\lim_{k \rightarrow \infty} (u, \Delta v_k) + (u, qv) = -(u, \Delta v) + (u, qv) = (u, l[v]), \end{aligned}$$

где последовательность v_k построена аналогично последовательности u_k в (5).

Таким образом, при $v \in \mathfrak{D}_M$ имеем для любой дважды непрерывно дифференцируемой финитной в Ω функции u равенство

$$(l[u], v) = (u, l[v]),$$

откуда следует включение $M \subset L^*$.

Пусть, обратно, $v \in \mathfrak{D}_{L^*}$, а $u(P)$ — любая дважды непрерывно дифференцируемая и финитная в некоторой области $\omega \subset \Omega$ функция. Имеем

$$(l[u], v) = (u, v^*)$$

или

$$(\Delta u, v) = (u, qv - v^*),$$

откуда, положив при $P \in \omega$ и $h = qv - v^*$

$$v_0(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega} \frac{h(Q)}{r(P, Q)} d\omega_Q,$$

получаем

$$(\Delta u, v) = (u, \Delta v_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} (u, \Delta v_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} (\Delta u, v_k) = (\Delta u, v_0), \quad (7)$$

где последовательность v_k построена так же, как и последовательность u_k в (5).

Таким образом, в силу (7)

$$(\Delta u, v - v_0) = 0,$$

то есть для данной измеримой в ω функции $\eta(P) = v(P) - v_0(P)$ имеет место равенство

$$\int_{\omega} \eta(Q) \Delta u(Q) d\omega = 0, \quad (8)$$

какова бы ни была дважды непрерывно дифференцируемая и финитная в области ω функция $u(P)$.

Из равенства (8), в силу известной леммы С. Л. Соболева *) [90(1)], следует, что функция $\eta(P)$ почти всюду в ω совпадает с некоторой гармонической функцией $\gamma(P)$, так что функция v из $\mathfrak{D}_{L^*}$ представима в виде

$$v(P) = v_0(P) + \gamma(P) \quad (P \in \omega),$$

откуда следует, что функция $v(P)$ потенциальна в области ω , а так как ω есть произвольная ограниченная область, содержащаяся целиком внутри Ω , то функция $v(P)$ оказывается потенциальной в Ω .

Далее, $v \in \mathcal{L}_2(\Omega)$ и

$$l[v] = l[v_0] + l[\gamma] = -\Delta v_0 + q(v_0 + \gamma) = v^* \in \mathcal{L}_2(\Omega),$$

так что

$$L^* \subset M$$

и теорема 33 доказана.

Согласно общей теории симметрических операторов, область определения оператора L^* описывается формулой

$$\mathfrak{D}_{L^*} = \mathfrak{D}_L + \mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} \quad (\text{Im } \lambda \neq 0),$$

а область определения любого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L — формулой

$$\mathfrak{D}_{\tilde{L}} = \mathfrak{D}_L + \{\mathfrak{N}_\lambda + U\mathfrak{N}_\lambda\} \quad (\text{Im } \lambda \neq 0),$$

где $\mathfrak{N}_\lambda$ при любом λ есть подпространство решений уравнения

$$L^*g - \lambda g = 0, \quad (9)$$

а U — унитарный оператор, отображающий $\mathfrak{N}_\lambda$ на $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$.

Для того чтобы избежать необходимости вводить обобщенные решения уравнения (9), будем в дальнейшем счи-

*) Здесь используется частный случай этой леммы, рассмотренный Г. Вейлем [20(4)]. Доказательство Г. Вейля воспроизводится в конце этого пункта.

татъ функцию $q(P)$ непрерывно дифференцируемой в области Ω .

При этом предположении, в силу известных теорем теории потенциала (см., например, [91]), подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ будут состоять лишь из дважды непрерывно дифференцируемых функций. Это обстоятельство позволяет ввести в рассмотрение незамкнутые операторы $\tilde{L}' (\tilde{L}' \subset \tilde{L})$ и $M' (M' \subset L^*)$ с областями определения

$$\mathfrak{D}_{M'} = \mathfrak{D}_{\tilde{L}} \dot{+} \mathfrak{N}_\lambda \dot{+} \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$$

и

$$\mathfrak{D}_{\tilde{L}'} = \mathfrak{D}_{\tilde{L}} \dot{+} \{\mathfrak{N}_\lambda + U\mathfrak{N}_\lambda\}, \quad (10)$$

состоящими лишь из дважды непрерывно дифференцируемых функций. Операторы L^* и $\tilde{L}$, являющиеся, очевидно, замыканиями операторов M' и $\tilde{L}'$ соответственно, определяются этими операторами однозначно.

Формула (10), определяющая выбор многообразия $\mathfrak{D}_{\tilde{L}'}$ как части многообразия $\mathfrak{D}_{M'}$, не накладывает каких-либо ограничений на поведение функций из $\mathfrak{D}_{M'}$ во внутренних точках области Ω . Действительно, если $u(P) \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}'}$, а $v(P)$ — любая функция из $\mathfrak{D}_{M'}$, совпадающая с $u(P)$ вне некоторой области $\omega \subset \Omega$, то $v(P)$ также принадлежит $\mathfrak{D}_{\tilde{L}'}$, как сумма двух функций: $u(P)$ из $\mathfrak{D}_{\tilde{L}'}$ и финитной в Ω функции $v(P) - u(P)$ из $\mathfrak{D}_{\tilde{L}} \subset \mathfrak{D}_{\tilde{L}'}$.

Таким образом, условия, выделяющие при определенном выборе оператора U класс функций $\mathfrak{D}_{\tilde{L}'}$ из $\mathfrak{D}_{M'}$, не накладывают в указанном выше смысле ограничений на поведение функций из $\mathfrak{D}_{M'}$ в любой области $\omega \subset \Omega$, и поэтому эти условия, определяемые неявно оператором U в формуле (10), естественно назвать краевыми условиями. При этом классические краевые условия вида $\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \rho u \right]_{P \in S} = 0$ являются весьма частным случаем краевых условий, о которых здесь идет речь.

Вопрос о явном виде краевых условий и решении соответствующих краевых задач для регулярных дифференциальных операций был рассмотрен в ряде работ М. И. Вишика (см. [24]).

Если операция (1) регулярна и краевые условия, определяемые оператором U , таковы, что спектр $S(\tilde{L})$ полу-

ограничен снизу и исчерпывается собственными значениями конечной кратности с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$, то такие краевые условия будем называть *регулярными*. В противном случае краевые условия для регулярной операции будем называть *сингулярными*.

Оператор $\tilde{L}$ будем называть *регулярным*, если регулярны определяющие его операция (1) и краевые условия; при невыполнении хотя бы одного из этих двух условий оператор $\tilde{L}$ будем считать *сингулярным*.

Обозначим через $\Omega[\sigma, \zeta]$ часть пространства $\mathcal{E}$, расположенную между замкнутыми поверхностями σ и ζ , из которых вторая может быть целиком удалена в бесконечность (в последнем случае $\Omega[\sigma, \zeta]$ есть часть пространства $\mathcal{E}$, расположенная вне поверхности σ).

При $\Omega = \Omega[\sigma, \zeta]$ краевые условия, определяемые оператором U , назовем *разделенными*, если из принадлежности к $\mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ функции $u(P)$ следует принадлежность к $\mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ любой функции $v(P)$ из $\mathfrak{D}_{M'}$, совпадающей с $u(P)$ вблизи границы ζ и равной нулю вблизи границы σ (или совпадающей с $u(P)$ вблизи σ и равной нулю вблизи ζ , из одного свойства следует другое). Разделенные краевые условия являются аналогом штурмовых условий для одномерного случая.

Для любых двух функций $u, v \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ имеет место равенство

$$(\Delta u, v) = (u, \Delta v),$$

из которого вытекает существование и равенство нулю предела

$$\lim_{\sigma' \rightarrow \zeta'} \int_{\sigma'} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds$$

при любом способе приближения σ' к σ и ζ' к ζ .

Покажем, что для разделенности краевых условий, определяющих оператор $\tilde{L}$, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух функций $u, v \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ выполнялись предельные соотношения

$$\begin{aligned} \lim_{\sigma' \rightarrow \sigma} \int_{\sigma'} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds &= 0, \\ \lim_{\zeta' \rightarrow \zeta} \int_{\zeta'} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial n} - v \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds &= 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Необходимость сформулированного условия очевидна. Для доказательства достаточности предположим, что функция $\varpi(P) \in \mathfrak{D}_M$ равна нулю вблизи σ и совпадает с некоторой функцией $v(P) \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ вблизи ζ . Надлежит установить, что $\varpi \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}'}$, а для этого (в силу самосопряженности оператора $\tilde{L}$) достаточно показать, что при каждой функции $u \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}'}$ будет

$$(l[u], \varpi) = (u, l[\varpi]).$$

Последнее равенство эквивалентно предельному соотношению

$$\lim_{\substack{\sigma' \rightarrow \sigma \\ \zeta' \rightarrow \zeta}} \int_{\sigma' + \zeta'} \left\{ u \frac{\partial \varpi}{\partial n} - \varpi \frac{\partial u}{\partial n} \right\} ds = 0,$$

которое выполнено в силу (11), так как вблизи σ имеем $\varpi = \frac{\partial \varpi}{\partial n} = 0$, а вблизи ζ имеем $\varpi = v$, $\frac{\partial \varpi}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial n}$.

Введем теперь используемое в дальнейшем понятие об эквивалентности краевых условий.

Пусть $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ — самосопряженные операторы, порождаемые одной и той же операцией (1) в областях $\Omega[\sigma_1, \zeta]$ и $\Omega[\sigma_2, \zeta]$ соответственно. Краевые условия на поверхности ζ (или в бесконечности, если ζ отсутствует) для операторов $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ будем считать *эквивалентными* (одинаковыми), если из принадлежности равной нулю внутри замкнутой поверхности σ (охватывающей σ_1 и σ_2) функции из $\mathfrak{D}_M$ к $\mathfrak{D}_{\tilde{L}_1'}$ следует ее принадлежность к $\mathfrak{D}_{\tilde{L}_2'}$. Заметим, что если это последнее требование выполнено, то, обратно, из принадлежности равной нулю внутри замкнутой поверхности σ функции из $\mathfrak{D}_M$ к $\mathfrak{D}_{\tilde{L}_2'}$ следует ее принадлежность к $\mathfrak{D}_{\tilde{L}_1'}$.

Для эквивалентности краевых условий на ζ (или в бесконечности) необходимо и достаточно, чтобы для любой пары функций $u \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}_1'}$ и $v \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}_2'}$ выполнялось предельное соотношение (11) при $\zeta' \rightarrow \zeta$ (или при удалении ζ' в бесконечность, если ζ отсутствует).

В заключение настоящего пункта приведем доказательство Г. Вейля леммы, использованной при доказательстве теоремы 33.

Л е м м а 8 [20 (4)]. Если для данной измеримой в области ω функции $\eta(P)$ имеет место равенство (8) при любой дважды непрерывно дифференцируемой и финитной в области ω функ-

ции $u(P)$, то функция $\eta(P)$ почти всюду в ω совпадает с некоторой гармонической функцией.

Доказательство. Пусть P_0 есть произвольная точка из ω и d — ее расстояние от границы области ω . Очевидно, достаточно показать, что почти всюду в шаровой окрестности точки P_0 радиуса ρ функция $\eta(P)$ совпадает с некоторой гармонической функцией $\gamma(P)$. Доказательство этого предложения основано на использовании равенства (8) для специальной системы функций

$$u(Q) = u_1(Q) - u_2(Q). \quad (12)$$

Для построения функции $u_1(Q)$ будем исходить из потенциала $u_1^0(Q, P; \rho)$, поля сферы $r(P, M) = \rho$ с центром в точке P , заряженной с постоянной поверхностной плотностью $\sigma_1(M) = \frac{1}{4\pi\rho^2}$. Очевидно,

$$u_1^0(Q, P; \rho) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & \text{при } r(P, Q) < \rho, \\ \frac{1}{r(P, Q)} & \text{при } r(P, Q) \geq \rho. \end{cases}$$

Заменим, далее, сферу $r(P, M) = \rho$ шаром $r(P, M) < c$ с объемной плотностью заряда в точке M , равной

$$\sigma_1(M) \rho^2 \mu_1(\rho),$$

где $\rho = r(P, M)$, а функция $\mu_1(\rho)$ будет выбрана позднее.

Для потенциала поля такого шара получаем формулу

$$u_1(Q) = u_1(Q, P; c) = \int_0^c u_1^0(Q, P; \rho) \mu_1(\rho) \rho^2 d\rho. \quad (13)$$

Для построения функции $u_2(Q)$ будем исходить из функции

$$u_2^0(Q, P; R) = \begin{cases} \frac{1}{r(P_0, P) \cdot r(P^*, Q)} & \text{при } r(P_0, Q) < R \\ & (r(P_0, P) r(P_0, P^*) = R^2), \\ \frac{1}{r(P, Q)} & \text{при } r(P_0, Q) \geq R, \end{cases}$$

которую можно рассматривать как потенциал поля простого сферического слоя $r(P_0, M) = R$ с поверхностной плотностью заряда в точке M , равной

$$\sigma_2(M) = \frac{1}{R} \frac{R^2 - r^2(P_0, P)}{r^2(P, M)}.$$

Заменим сферический слой шаровым кольцом $a < r(P_0, M) < b$, заряженным с объемной плотностью, равной

$$\sigma_2(M) \mu_2(R) R,$$

где $R = r(P_0, M)$, а функция $\mu_2(R)$ будет выбрана ниже.

При этом будем предполагать, что шаровое кольцо $a < r(P_0, M) < b$ целиком лежит в области ω и сфера $r(P_0, M) = a$ содержит сферу $r(P, M) = c$. Для потенциала поля шарового кольца получаем формулу

$$u_2(Q) = u_2(Q, P; a, b) = \int_a^b u_2^0(Q, P; R) \mu_2(R) R dR. \quad (14)$$

Функции $\mu_1(\rho)$ и $\mu_2(\rho)$ прежде всего подчиним равенствам

$$\int_0^c \mu_1(\rho) \rho^2 d\rho = 1, \quad \int_a^b \mu_2(R) R dR = 1,$$

так чтобы обе функции $u_1(Q)$ и $u_2(Q)$ вне сферы $r(P_0, M) = b$ были равны $\frac{1}{r(P, Q)}$. Далее будем считать функции $\mu_1(\rho)$ и $\mu_2(\rho)$ непрерывно дифференцируемыми и удовлетворяющими условиям

$$\mu_1(c) = \mu_1'(c) = \mu_2(a) = \mu_2'(a) = \mu_2(b) = \mu_2'(b) = 0.$$

При таком выборе функций μ_1 и μ_2 плотности зарядов шара $r(P, M) \leq c$ и шарового кольца $a \leq r(P_0, M) \leq b$, порождающих потенциалы (13) и (14), непрерывны вместе со своими частными производными в области ω . Поэтому функции $u_1(Q)$ и $u_2(Q)$ будут дважды непрерывно дифференцируемы. При этом они удовлетворяют уравнению Пуассона.

Таким образом, функция $u(Q)$, построенная по формуле (12), дважды непрерывно дифференцируема и финитна в ω . Подставляя функцию $u(Q)$ в равенство (8) и пользуясь уравнением Пуассона, получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\int \int \int_{r(P, Q) \leq c} \mu_1(Q) \eta(Q) d\omega_Q}{\int_0^c \mu(\rho) \rho^2 d\rho} = \\ & = \frac{\int \int \int_{a \leq r(P_0, Q) \leq b} \frac{r^2(P_0, Q) - r^2(P_0, P)}{r^3(Q, P)} \mu_2(Q) \eta(Q) d\omega_Q}{\int_a^b \mu_2(R) R dR}, \quad (15) \end{aligned}$$

Правая часть равенства (15), очевидно, не зависит от c ; она также не зависит от a и b , ибо левая часть (15) не содержит a и b . Так как выражение

$$\frac{r^2(P_0, Q) - r^2(P_0, P)}{r^3(Q, P)}$$

есть гармоническая функция точки P , то, в силу принципа суперпозиции, правая часть равенства (15) есть некоторая гармоническая функция $\gamma(P)$ в области ω .

Переходя в (15) к пределу при $c \rightarrow 0$, получаем для почти всех $P \in \omega$ равенство

$$4\pi\eta(P) = \gamma(P),$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что доказательство леммы 8 существенно упростилось бы, если можно было бы а priori считать функцию $u(P)$ непрерывной [89]. В связи с леммой 8 см. также [29].

16. Об индексе дефекта дифференциальных операторов в частных производных. В одномерном случае этот вопрос специально не рассматривался, так как там дефектные числа не могли оказаться бесконечными, и, поскольку изучаемые свойства спектра одинаковы для всех конечномерных самосопряженных расширений данного оператора, то можно было оставить без внимания теоремы, которые позволяют судить о значении дефектных чисел по поведению коэффициентов дифференциальной операции.

Иначе обстоит дело в многомерном случае. Здесь дефектное число минимального оператора L равно размерности линейного многообразия всех решений уравнения

$$-\Delta u + qu - \lambda u = 0 \quad (\operatorname{Im} \lambda \neq 0),$$

принадлежащих $\mathcal{L}_2(\Omega)$, а это многообразие может оказаться бесконечномерным.

В частности, для случая регулярной операции (1) всегда будет $\operatorname{Def} L = \infty$, а в сингулярном случае имеем

$$0 \leq \operatorname{Def} L \leq \infty. \quad (16)$$

При $\Omega = \mathbb{R}$ легко построить примеры, когда дефектное число принимает крайние значения, указываемые неравенством (16), но примеры, когда $0 < \operatorname{Def} L < \infty$, не известны.

Ниже приводятся два признака равенства нулю дефектного числа оператора L . Первый из них (теорема 34) принадлежит Т. Карлеману и К. Фридрихсу, а второй (теорема 35) впервые установлен А. Я. Повзнером.

Следующая лемма установлена в [23(1)]. Приводимое ниже доказательство этой леммы принадлежит в основном Ф. С. Рофе-Бекетову.

Лемма 9 [23(1)]. В случае ограниченного снизу потенциала из включений $u \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E})$ и $l[u] \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E})$ следует включение $|\nabla u| \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E})$.

Доказательство. В силу первой формулы Грина имеем

$$\int_{|OP|=R} u \frac{\partial u}{\partial R} ds = \int_{|OP|<R} |\nabla u|^2 d\omega + \int_{|OP|<R} u \Delta u d\omega. \quad (17)$$

С другой стороны, из включений $u \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E})$ и $l[u] \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E})$ следует существование при $R \rightarrow \infty$ конечного предела у суммы

$$- \int_{|OP|<R} u \Delta u d\omega + \int_{|OP|<R} qu^2 d\omega, \quad (18)$$

откуда, в силу ограниченности снизу потенциала, вытекает, что при $R \rightarrow \infty$ первое слагаемое в (18) стремится к конечному пределу или к минус бесконечности. Но тогда правая часть равенства (17), а следовательно и функция

$$F(R) = \int_{|OP|=R} u \frac{\partial u}{\partial R} ds$$

при $R \rightarrow \infty$ имеет конечный предел либо стремится к $+\infty$. Поэтому для доказательства леммы достаточно установить, что случай, когда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} F(R) = +\infty, \quad (19)$$

невозможен.

Вводя функцию

$$J(R) = \int_{|OP|=R} |u|^2 ds$$

и положив

$$d\sigma = \sin \theta d\varphi d\theta,$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{dI}{dR} &= \frac{d}{dR} \left\{ R^2 \int_{|OP|=R} u^2 d\sigma \right\} = \\ &= 2R \int_{|OP|=R} u^2 d\sigma + 2R^2 \int_{|OP|=R} u \frac{\partial u}{\partial R} d\sigma = \\ &= \frac{2}{R} \int_{|OP|=R} u^2 ds + 2F(R). \end{aligned} \quad (20)$$

Из полученного соотношения (20) видно, что вместе с (19) будет

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J'(R) = +\infty,$$

и, тем более,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} J(R) = +\infty,$$

что противоречит принадлежности функции $u(P)$ пространству $\mathcal{L}_2(\mathcal{E})$, ибо, очевидно,

$$\int_{\mathcal{E}} |u|^2 d\omega = \int_0^{\infty} J(R) dR.$$

Лемма доказана.

Теорема 34 [47]. Если потенциал $q(P)$ ограничен снизу, то дефектные числа соответствующего оператора L равны нулю, то есть $L = L^*$.

Доказательство. Достаточно установить симметричность оператора L^* , то есть равенство

$$\int_{\mathcal{E}} \{u\Delta v - v\Delta u\} d\omega = 0 \quad (21)$$

для любой пары функций $u, v \in \mathfrak{D}_{L^*}$. Это равенство, очевидно, эквивалентно предельному соотношению

$$\lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{|OP|=R_n} \left\{ u \frac{\partial v}{\partial R} - v \frac{\partial u}{\partial R} \right\} ds = 0. \quad (22)$$

Если функции u и v принадлежат $\mathfrak{D}_{L^*}$, то в силу леммы 9 будет

$$|\nabla u| \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E}), \quad |\nabla v| \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E})$$

и, тем более,

$$\frac{\partial u}{\partial R} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E}), \quad \frac{\partial v}{\partial R} \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E}).$$

Таким образом,

$$\int_{\mathcal{E}} |u| \left| \frac{\partial v}{\partial R} \right| d\omega < \infty,$$

то есть

$$u \frac{\partial v}{\partial R} \in \mathcal{L}_1(\mathcal{E}) \quad (23)$$

и, поскольку также

$$v \frac{\partial u}{\partial R} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{E}),$$

то и

$$u \frac{\partial v}{\partial R} - v \frac{\partial u}{\partial R} \in \mathcal{L}_1(\mathbb{E}),$$

то есть

$$\int_{\mathbb{E}} \left| u \frac{\partial v}{\partial R} - v \frac{\partial u}{\partial R} \right| d\omega < \infty$$

или

$$\int_0^\infty dR \int_{|OP|=R} \left| u \frac{\partial v}{\partial R} - v \frac{\partial u}{\partial R} \right| ds < \infty. \quad (24)$$

Из полученного неравенства (24) вытекает существование последовательности $R_n \rightarrow \infty$, для которой имеет место предельное соотношение (22), что и требовалось установить.

Доказательство Т. Карлемана теоремы 34 было основано на его лемме о существовании для любой дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(P) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{E})$ последовательности сфер $|OP| = R_n$, на которой выполнено предельное соотношение (26) (см. ниже).

Очевидно, в (22) можно заменить R_n на R , что следует из существования интеграла в левой части (21) для любых u и v из $\mathfrak{D}_L^*$.

Заметим также, что при $u \in \mathfrak{D}_L^*$ из одного соотношения (23) следует неравенство

$$\int_0^\infty dR \int_{|OP|=R} \left| u \frac{\partial v}{\partial R} \right| ds < \infty$$

и вместе с ним для некоторой последовательности $R_n \rightarrow \infty$ соотношение

$$\lim_{R_n \rightarrow \infty} \int_{|OP|=R_n} u \frac{\partial v}{\partial R} ds = 0. \quad (25)$$

В частности, при $v = u \in \mathfrak{D}_L$ соотношение (25) означает, что функция

$$S(R) = \int_{|OP|=R} u \frac{\partial u}{\partial R} ds$$

стремится к нулю при $R_n \rightarrow \infty$, а так как из (17) вытекает существование предела $S(R)$ при $R \rightarrow \infty$, то

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|OP|=R} u \frac{\partial u}{\partial R} ds = 0. \quad (26)$$

Теперь, согласно лемме 9, для значения квадратичного функционала (Lu, u) на любой функции $u \in \mathfrak{D}_L$ получаем формулу

$$(Lu, u) = \int_{\mathfrak{E}} |\nabla u|^2 d\omega + \int_{\mathfrak{E}} q |u|^2 d\omega, \quad (27)$$

которая в случае неограниченного снизу потенциала справедлива, вообще говоря, лишь на финитных функциях из $\mathfrak{D}_L$.

Как заметил Ф. С. Рофе-Бекетов, лемма 9, а значит, и теорема 34, при определенных ограничениях относительно вида границы и краевых условий переносится на случай $\Omega \neq \mathfrak{E}$.

Переходя к изложению этого замечания, обозначим через S незамкнутую поверхность, разбивающую пространство $\mathfrak{E}$ на части Ω и $\mathfrak{E} - \Omega$, из которых первую назовем «внутренней». Пусть, далее, σ_R есть часть сферы $|OP| = R$, лежащая в Ω , S_R — часть поверхности S , ограничивающая вместе с σ_R конечную часть Ω_R области Ω , а n_P — внешняя нормаль к S в точке P . Пусть, далее, оператор L есть замыкание в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ оператора, определяемого операцией (1), на дважды непрерывно дифференцируемых функциях $u(P)$, обращающихся тождественно в нуль при $|OP| > R_u$ и удовлетворяющих на S одному из трех краевых условий

$$u(P)|_{P \in S} = 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{P \in S} = 0, \quad (29)$$

или

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \rho u \Big|_{P \in S} = 0, \quad (30)$$

где

$$\rho = \rho(P) \geq 0.$$

Можно показать, что при этом оператор L^* будет определяться операцией (1) на всех потенциальных функциях $u(P)$, принадлежащих вместе с $l[u]$ пространству $\mathcal{L}_2(\Omega)$ и удовлетворяющих соответственно одному из условий (28), (29) или (30).

Теперь вместо (17) будем иметь

$$\int_{\sigma_R} u \frac{\partial u}{\partial R} ds = \int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 d\omega + \int_{\Omega_R} u \Delta u d\omega - \int_{S_R} u \frac{\partial u}{\partial n} ds \quad (31)$$

и, полагая

$$F(R) = \int_{\sigma_R} u \frac{\partial u}{\partial R} ds, \quad J(R) = \int_{\sigma_R} u^2 ds,$$

получим вместо (20) равенство

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dR} &= 2R \int_{\sigma_0(R)} u^2 d\sigma + 2R^2 \int_{\sigma_0(R)} u \frac{\partial u}{\partial R} d\sigma - R \int_{C_0(R)} \operatorname{ctg}(n, R) u^2 dl_0 = \\ &= \frac{2}{R} \int_{\sigma_R} u^2 d\sigma - \int_{C_R} \operatorname{ctg}(n, R) u^2 dl + 2F(R), \end{aligned} \quad (32)$$

где $\sigma_0(R)$ есть центральная проекция из начала координат поверхности σ_R на поверхность единичной сферы $|OP|=1$, C_R — линия пересечения σ_R с S_R , $C_0(R)$ — ее центральная проекция на сферу $|OP|=1$, dl и dl_0 — соответствующие дифференциалы дуг.

В случае краевого условия (28) соотношения (31) и (32) совпадают с соотношениями (17) и (20), так что доказательства леммы 9 и теоремы 34 в этом случае не отличаются от приведенных выше. В случае же краевых условий (29) или (30) доказательства аналогичны, если подчинить поверхность требованию

$$\operatorname{ctg}(n, R) \leq 0. \quad (33)$$

Последнее неравенство означает, что с увеличением R центральная проекция σ_R на единичную сферу $|OP|=1$ не сужается. Предположение (33) достаточно считать выполненным для всех точек $P \in S$, находящихся вне сферы $|OP|=R_0$.

Что касается вида квадратичного функционала, то в случае краевых условий (28) и (29) сохраняется формула (27), а в случае краевого условия (30) будет для любой функции $u \in \mathfrak{D}_L$

$$(Lu, u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\omega + \int_{\Omega} q |u|^2 d\omega + \int_S \rho |u|^2 ds.$$

Следующее предложение, высказанное в качестве предположения автором и впервые установленное А. Я. Повзнером (см. [81]), показывает, что теорема 34 остается справедливой при замене требования ограниченности снизу потенциала менее ограничительным предположением об ограниченности снизу оператора L . Приводимое ниже доказательство этого предложения принадлежит Е. Вингольцу [22].

Теорема 35 [81]. *Если оператор L , определяемый операцией (1) в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E})$, ограничен снизу, то он самосопряжен.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что при любых $u \in \mathfrak{D}_L$ имеем

$$\int_{\mathcal{E}} (-\Delta u + qu) \bar{u} d\omega > \int_{\mathcal{E}} |u|^2 d\omega. \quad (34)$$

Достаточно установить, что при условии (34) уравнение

$$-\Delta v + qv = 0 \quad (35)$$

не может иметь нетривиальных решений в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E})$.

Предполагая, что v есть решение уравнения (35), положим

$$u_R(P) = \theta_R(P) v(P), \quad (36)$$

где

$$\theta_R(P) = \theta_R(|OP|) = \theta\left(\frac{|OP|}{R}\right),$$

а $\theta(r)$ — достаточно гладкая финитная функция аргумента $r \geq 0$, удовлетворяющая условиям

$$\theta(r) = \begin{cases} 1 & (0 \leq r \leq \frac{1}{2}), \\ 0 & (r > 1). \end{cases}$$

Очевидно, финитная функция $u_R(P)$, определяемая равенством (36), принадлежит $\mathfrak{D}_L$, так что для нее имеет место соотношение (34), то есть

$$\int_{\mathcal{E}} \theta_R^2 v^2 d\omega < \int_{\mathcal{E}} (-\Delta u_R + qu_R) u_R d\omega,$$

но

$$\begin{aligned} -\Delta u_R + qu_R &= (-\Delta v + qv) \theta_R - 2\nabla v \cdot \nabla \theta_R - v \Delta \theta_R = \\ &= -2\nabla v \cdot \nabla \theta_R - v \Delta \theta_R, \end{aligned}$$

так что

$$\int_{\mathcal{E}} \theta_R^2 v^2 d\omega < - \int_{\mathcal{E}} \{2\nabla v \cdot \nabla \theta_R + v \Delta \theta_R\} v \theta_R d\omega. \quad (37)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} 2 \int_{\mathcal{E}} \nabla v \cdot \nabla \theta_R v \theta_R d\omega &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} \nabla v^2 \cdot \nabla \theta_R^2 d\omega = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{E}} v^2 \Delta \theta_R^2 d\omega = \\ &= - \int_{\mathcal{E}} v^2 (\theta_R \Delta \theta_R + |\nabla \theta_R|^2) d\omega, \end{aligned}$$

так что неравенство (37) принимает вид

$$\int_{\mathcal{E}} \theta_R^2 v^2 d\omega < \int_{\mathcal{E}} v^2 |\nabla \theta_R|^2 d\omega,$$

то есть

$$\int_{|OP| < \frac{R}{2}} v^2 d\omega > \frac{C}{R^2} \int_{|OP| < R} v^2 d\omega. \quad (38)$$

Если теперь предположить, что решение $v(P)$ принадлежит $\mathcal{L}_2(\mathcal{E})$, то из полученного неравенства (38) при $R \rightarrow \infty$ следует $v(P) \equiv 0$ и теорема доказана.

Другое обобщение теоремы 34 на случай потенциалов $q(P)$, ограниченных снизу функцией $\mu(r)$, стремящейся не слишком быстро к минус бесконечности при $r \rightarrow \infty$, принадлежит Д. Сиерсу [87].

17. Расщепление в многомерных областях. Пусть, как и ранее, $\Omega = \Omega[\sigma, \zeta]$ есть часть пространства $\mathcal{E}$, расположенная между замкнутыми поверхностями σ и ζ . В частности, когда поверхность σ отсутствует, Ω есть часть пространства, лежащая внутри ζ , а при отсутствии поверхности ζ область Ω есть часть пространства, лежащая вне σ . При отсутствии обеих границ будет $\Omega = \mathcal{E}$.

Обозначим через Γ произвольную замкнутую поверхность, разбивающую область Ω на части $\omega = \Omega[\sigma, \Gamma]$ и $\Omega_\Gamma = \Omega[\Gamma, \zeta]$. Далее, несколько модифицируя аналогичное построение п° 7, обозначим через L_0 замыкание симметрического оператора $\dot{L}_0$, определенного равенством

$$\dot{L}_0 u = \tilde{L} u$$

на всех функциях $u \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$, обращающихся тождественно в нуль вблизи поверхности расщепления Γ .

Симметрический оператор L_0 есть ортогональная сумма минимального дифференциального оператора L_ω и симметрического оператора L_Γ , индуцируемых оператором $\tilde{L}$ в $\mathcal{L}_2(\omega)$ и $\mathcal{L}_2(\Omega_\Gamma)$ соответственно. Таким образом, соотношения

$$\tilde{L} = L_0, \quad L_0 = L_\omega \oplus L_\Gamma \quad (39)$$

определяют расщепление оператора $\tilde{L}$, но в отличие от одномерного случая это расщепление является бесконечномерным. Поэтому обоснование соотношения

$$C(\tilde{L}) = C(L_0) \quad (40)$$

с помощью ссылки на общие теоремы п° 2 было бы здесь неправомерным.

Таким образом, принцип расщепления, состоящий в замене оператора $\tilde{L}$ «расщепленным» оператором L_0 и использовании соотношения (40), требует нового обоснования, что и является целью настоящего пункта.

Доказательство соотношения (40) для многомерных дифференциальных операторов основано на следующей лемме.

Лемма 10 [31 (5)]. *Если $\lambda \in C(\tilde{L})$ и $\omega \subset \Omega$, то существует характеристическая последовательность $\{v_n\}$ для значения λ , удовлетворяющая условию*

$$v_n(P) \equiv 0 \quad (P \in \omega; \quad n = 1, 2, \dots).$$

Доказательство. Для $\lambda \in C(\tilde{L})$ существует в $\mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ ортонормированная характеристическая последовательность $\{f_n\}$. С другой стороны, поскольку оператор $\tilde{L}$ есть замыкание оператора $\tilde{L}'$, существует в $\mathfrak{D}_{\tilde{L}'}$ последовательность $\{\varphi_n\}$ такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f_n - \varphi_n) = 0$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{L}f_n - \tilde{L}\varphi_n) = 0.$$

Из этих предельных соотношений вытекает, что последовательность $\{\varphi_n\}$ также является характеристической для данного значения λ и при этом $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\| = 1$.

Положим

$$h_n = -\Delta\varphi_n + (q - \lambda)\varphi_n \quad (41)$$

и обозначим через ω' какую-нибудь область, удовлетворяющую условию $\omega \subset \omega' \subset \Omega$.

Из равенства (41) следует представление

$$4\pi\varphi_n(P) = \int_{\omega'} \frac{h_n(Q)}{r(P, Q)} d\omega_Q + \int_{\omega'} \frac{\lambda - q(Q)}{r(P, Q)} \varphi_n(Q) d\omega_Q + \gamma_n(P), \quad (42)$$

из которого вытекает ограниченность в $\mathcal{L}_2(\omega')$ последовательности гармонических функций $\{\gamma_n(P)\}$, откуда, в силу известных теорем [54], заключаем, что эта последовательность компактна в смысле равномерной сходимости в любой области $\omega'' \subset \omega'$.

Так как, далее, интегральный оператор

$$K[h] = \int_{\omega'} \frac{h(Q)}{r(P, Q)} d\omega_Q$$

преобразует любую ограниченную в $\mathcal{L}_2(\omega')$ последовательность функций в последовательность функций, компактную в смысле равномерной сходимости в ω' , то, вторично используя представление (42) и уже доказанную компактность последовательности $\{\gamma_n(P)\}$, устанавливаем компактность последовательности $\{\varphi_n(P)\}$ в смысле равномерной сходимости в ω'' .

Далее, очевидно, вместе с ортонормированной последовательностью $\{f_n\}$ будет характеристической и последовательность

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \{f_{2n}(P) - f_{2n-1}(P)\},$$

а значит, и последовательность функций

$$u_n(P) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\varphi_{2n}(P) - \varphi_{2n-1}(P)] \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (43)$$

и при этом будет

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n(P)\|_{\Omega} = 1.$$

Здесь $\|\dots\|_{\Omega}$ обозначает норму в $\mathcal{L}_2(\Omega)$. Аналогичный смысл имеет употребляемый ниже индекс возле знака нормы или скалярного произведения для любой области ω . В случае одновременного рассмотрения других метрик во избежание недоразумений индекс ω будем заменять индексом $\mathcal{L}_2(\omega)$.

Зафиксировав область ω'' с соблюдением условия $\omega \subset \omega'' \subset \omega'$, можем, не нарушая общности, предположить, что вся последовательность $\{\varphi_n(P)\}$ сходится равномерно в области ω'' . При этом для определенной равенством (43) характеристической последовательности $\{u_n\}$ будет в смысле равномерной сходимости в ω''

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(P) = 0 \quad (P \in \omega''). \quad (44)$$

Для того чтобы перейти от последовательности $\{u_n\}$ к искомой последовательности $\{v_n\}$, положим

$$v_n(P) = \theta(P) u_n(P) \quad (P \in \Omega), \quad (45)$$

где $\theta(P)$ — какая-нибудь дважды непрерывно дифференцируемая в Ω функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \theta(P) &\equiv 0 & (P \in \omega), \\ \theta(P) &\equiv 1 & (P \notin \omega''), \\ 0 &\leq \theta(P) \leq 1 & (P \in \Omega). \end{aligned}$$

Так как функции $v_n(P)$ дважды непрерывно дифференцируемы в Ω и вне области $\omega'' \subset \Omega$ совпадают с $u_n(P) \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$, то $v_n \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ ($n = 1, 2, \dots$).

Из (45), (44) и (43) следует, что при достаточно большом N и $m > N$, $n > N$ будет

$$\begin{aligned} \|v_m - v_n\|_{\Omega} &\geq \|u_m - u_n\|_{\Omega} - \|v_m - u_m\|_{\Omega} - \|u_n - v_n\|_{\Omega} = \\ &= \|u_m - u_n\|_{\Omega} - \|(\theta - 1)u_m\|_{\omega''} - \|(1 - \theta)u_n\|_{\omega''} > 1, \end{aligned}$$

откуда следует некомпактность последовательности $\{v_n\}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Покажем, что в метрике $\mathcal{L}_2(\Omega)$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{-\Delta v_n + (q - \lambda)v_n\} = 0.$$

Используя с этой целью равенство (45), получаем

$$\begin{aligned} \|-\Delta v_n + (q - \lambda)v_n\|_{\Omega} &\leq \|-\Delta u_n + (q - \lambda)u_n\|_{\Omega} + \\ &+ 2\|\{|\nabla u_n| \cdot |\nabla \theta|\}\|_{\omega''} + \|u_n \Delta \theta\|_{\omega''}. \end{aligned} \quad (46)$$

Стремление к нулю при $n \rightarrow \infty$ первого и третьего слагаемого правой части неравенства (46) следует из того, что

$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$, и соотношения (44), так что остается доказать соотношение *)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla u_n\|_{\omega''} = 0. \quad (47)$$

Докажем, что для любой точки P области ω'' существует сфера $|PQ| = \rho$ радиуса ρ (не зависящего от P) такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|PQ| < \rho} |\nabla u_n(Q)|^2 d\omega_Q = 0, \quad (48)$$

откуда будет следовать (47).

Введем область ω''' , удовлетворяющую условию $\omega'' \subset \omega''' \subset \omega'$, и обозначим через b половину минимального расстояния между точками границы ω'' и точками границы ω''' .

Применяя вторую формулу Грина к сфере x_ρ , определяемой условиями $|PQ| < \rho$ ($P \in \omega''$, $\rho < b$), получаем

$$(\Delta u_n, u_n)_{x_\rho} = \int_{|PQ|=\rho} u_n \frac{\partial u_n}{\partial \rho} ds - \|\nabla u_n\|_{x_\rho}^2,$$

или, вводя сферические координаты и обозначения через Π прямоугольник ($0 > \vartheta < \pi$, $0 < \varphi < 2\pi$),

$$(\Delta u_n, u_n)_{x_\rho} = \int_{\Pi} u_n \frac{\partial u_n}{\partial \rho} \rho^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi - \|\nabla u_n\|_{x_\rho}^2,$$

откуда, интегрируя по ρ от a до b ($0 < a < b$) и меняя порядок интегрирования, находим

$$\begin{aligned} \int_a^b (\Delta u_n, u_n)_{x_\rho} d\rho &= \frac{1}{2} \int_{\Pi} [u_n^2 \rho^2]_a^b \sin \vartheta d\vartheta d\varphi - \\ &- \int_a^b d\rho \int_{\Pi} u_n^2 \rho \sin \vartheta d\vartheta d\varphi - \int_a^b \|\nabla u_n\|_{x_\rho}^2 d\rho \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \int_a^b \|\nabla u_n\|_{x_\rho}^2 d\rho &= \frac{1}{2} \int_{\Pi} [u_n^2 \rho^2]_a^b \sin \vartheta d\vartheta d\varphi - \\ &- \int_a^b (h_n, u_n)_{x_\rho} d\rho - \int_a^b ([q - \lambda] u_n, u_n)_{x_\rho} d\rho - \\ &- \int_a^b d\rho \int_{\Pi} u_n^2 \rho \sin \vartheta d\vartheta d\varphi. \end{aligned}$$

*) Здесь и далее пишем $\|\nabla u\|$ вместо $\| |\nabla u| \|$.

В силу равномерной сходимости к нулю последовательности $u_n(P)$ в ω''' и стремления к нулю в метрике $\mathcal{L}_2(\Omega)$ последовательности h_n каждое из слагаемых правой части последнего равенства стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, так что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \|\nabla u_n\|_{x_p}^2 d\rho = 0,$$

откуда следует предельное соотношение (47).

Так как, в силу (45), последовательность $\{v_n\}$ ограничена в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, то она обладает всеми требуемыми свойствами и лемма доказана.

Между прочим, из приведенного доказательства следует, что для каждого значения $\lambda \in C(\tilde{L})$ существует нормированная характеристическая последовательность, стремящаяся равномерно к нулю в любой области $\omega \subset \Omega$.

Теорема 36 [31 (5)]. *Если расщепление оператора $\tilde{L}$ определено соотношениями (39), то*

$$C(\tilde{L}) = C(L_0). \quad (49)$$

В частности, когда область Ω есть часть пространства $\mathcal{E}$, ограниченная замкнутой поверхностью ζ , или когда $\Omega = \mathcal{E}$, будет

$$C(\tilde{L}) = C(L_0) = C(L_\Gamma). \quad (50)$$

Доказательство. Если $\lambda \in C(L_0)$, то $\lambda \in C(\tilde{L})$, так как $L_0 \subset \tilde{L}$. Если, наоборот, $\lambda \in C(\tilde{L})$, то, согласно лемме 10, существует для оператора $\tilde{L}$ характеристическая последовательность функций, обращающаяся тождественно в нуль внутри некоторой области $\omega \subset \Omega$, содержащей границу расщепления Γ , и поэтому являющаяся также характеристической для оператора L_0 .

Таким образом, соотношение (49) установлено. Одновременно с этим установлено и соотношение (50), ибо в условиях второй части теоремы оператор L_ω регулярен, так что $C(L_\omega) = 0$ и, следовательно,

$$C(L_0) = C(L_\omega) + C(L_\Gamma) = C(L_\Gamma).$$

Из леммы 10 также следует, что, как и в одномерном случае, непрерывная часть спектра оператора $\tilde{L}$, определяемого операцией (1) в Ω , не зависит от поведения

функции $q(P)$ в любой области $\omega \subset \Omega$ (но теперь она зависит уже от краевого условия на границе области Ω).

Вопрос о независимости типа точек из $C(\tilde{L})$ от поведения функции $q(P)$ в области $\omega \subset \Omega$ остается в многомерном случае открытым.

Если краевые условия, определяющие вместе с операцией (1) в области $\Omega = \Omega[\sigma, \zeta]$ самосопряженный оператор $\tilde{L}$, разделены и если Γ есть замкнутая поверхность расщепления, охватывающая σ , то «расщепленный» оператор L_0 распадается в ортогональную сумму двух симметрических операторов

$$L_0 = L_{\sigma, \Gamma} \oplus L_{\Gamma, \zeta}, \quad (51)$$

индуцированных оператором $\tilde{L}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega[\sigma, \Gamma])$ и $\mathcal{L}_2(\Omega[\Gamma, \zeta])$ соответственно.

Условимся называть отделенное на границе σ краевое условие D -регулярным, если для некоторой поверхности расщепления Γ будет $C(L_{\sigma, \Gamma}) = 0$. Корректность этого определения следует из независимости множества $C(L_{\sigma, \Gamma})$ от выбора Γ , что вытекает из теоремы 36.

Теорема 37 [31 (5)]. Пусть $\tilde{L}_1$ есть самосопряженный оператор, порождаемый операцией (1) в области $\Omega[\sigma_1, \infty]$ с D -регулярным краевым условием на σ_1 . Если $\tilde{L}_2$ есть самосопряженный оператор, порождаемый той же операцией (1) в области $\Omega[\sigma_2, \infty]$ с разделенными условиями, причем условия в бесконечности для операторов $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ эквивалентны, то $C(\tilde{L}_1) \subset C(\tilde{L}_2)$.

Доказательство. Расщепляя оператор $\tilde{L}_1$ на поверхности Γ , охватывающей σ_1 и σ_2 , получаем

$$L_{1,0} = L_{\sigma_1, \Gamma} \oplus L_{\Gamma, \infty}.$$

Пользуясь соотношением $L_{\Gamma, \infty} \subset \tilde{L}_2$ и теоремой 36, имеем, далее,

$$C(\tilde{L}_1) = C(L_{1,0}) = C(L_{\sigma_1, \Gamma}) + C(L_{\Gamma, \infty}) = C(L_{\Gamma, \infty}) \subset C(\tilde{L}_2),$$

что и требовалось установить.

Если в условии теоремы 37 дополнительно предположить D -регулярность краевого условия на границе σ_2 , определяющего оператор $\tilde{L}_2$, то будет $C(\tilde{L}_1) = C(\tilde{L}_2)$.

В менее общей формулировке это предложение рассматривалось ранее иными средствами в [81].

18. Малые и относительно малые возмущения в многомерном случае. Принцип расщепления, установленный для операции (1) в предыдущем пункте, позволяет легко получить следующее многомерное обобщение теоремы 23.

Теорема 38 [31 (5)]. Пусть l_1 и $l_2 = l_\eta$ — две операции вида (1) в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E})$ и пусть функция $\eta(P) = q_2(P) - q_1(P)$ стремится к нулю при $|OP| \rightarrow \infty$. Если $\tilde{L}_1$ есть некоторый самосопряженный оператор, порождаемый операцией l_1 , то оператор $\tilde{L}_2$, порождаемый операцией l_2 на $\mathcal{D}_{\tilde{L}_1}$, самосопряжен и $C(\tilde{L}_1) = C(\tilde{L}_2)$.

Доказательство. Самосопряженность оператора $\tilde{L}_2$ следует из того, что он является суммой самосопряженного оператора $\tilde{L}_1$ и ограниченного оператора умножения на $\eta(P)$ (см. [72 (3)]).

Зададимся теперь числом $\delta > 0$ и расщепим операторы $\tilde{L}_1$ и $\tilde{L}_2$ на сфере $|OP| = \gamma$, вне которой $|\eta(P)| < \delta$.

Пользуясь теоремой 36, получаем

$$C(\tilde{L}_1) = C(L_{1,0}) = C(L_{1,\gamma}),$$

$$C(\tilde{L}_2) = C(L_{2,0}) = C(L_{2,\gamma}).$$

Расширяя операторы $L_{1,\gamma}$ и $L_{2,\gamma}$ до самосопряженных операторов $\tilde{L}_{1,\gamma}$ и $\tilde{L}_{2,\gamma}$ с помощью регулярного краевого условия $u(P) = 0$ при $|OP| = \gamma$, получаем соотношения

$$C(\tilde{L}_{1,\gamma}) = C(L_{1,\gamma}), \quad C(\tilde{L}_{2,\gamma}) = C(L_{2,\gamma}).$$

С другой стороны, из неравенства

$$\|\tilde{L}_{2,\gamma} - \tilde{L}_{1,\gamma}\| < \delta$$

и теоремы 9 следует, что при любом $\lambda \in C(\tilde{L}_{1,\gamma})$ будет

$$C(\tilde{L}_{2,\gamma}) \cap (\lambda - \delta, \lambda + \delta) \neq \emptyset,$$

откуда в силу произвольности числа $\delta > 0$ получаем включение $\lambda \in C(\tilde{L}_{2,\gamma}) = C(\tilde{L}_2)$, так что $C(\tilde{L}_1) \subset C(\tilde{L}_2)$. Точно так же получим, что $C(\tilde{L}_2) \subset C(\tilde{L}_1)$, и теорема доказана.

Переходя теперь к относительно малым возмущениям, будем предполагать, что в (1)

$$q(P) \geq \alpha > 0 \quad (P \in \mathcal{E}), \quad (52)$$

и обозначим через l_η операцию, образующуюся из (1) при замене $q(P)$ на $q(P) + \eta(P)$.

Следующая теорема, принадлежащая М. Ш. Бирману, является многомерным обобщением его теоремы 24.

Теорема 39 [13 (5)]. *Если выполнено (52) и*

$$\lim_{|OP| \rightarrow \infty} \frac{\eta(P)}{q(P)} = 0,$$

то оператор L_η самосопряжен и $C(L_\eta) = C(L)$.

Доказательство. Самосопряженность оператора L_η следует, в силу теоремы 34, из ограниченности снизу функции

$$q(P) + \eta(P) = q(P) \left\{ 1 + \frac{\eta(P)}{q(P)} \right\}.$$

Обозначим через A оператор, порождаемый невозмущенной операцией (1) на многообразии $\mathfrak{D}_L$ финитных функций из $\mathfrak{D}_L$, а через K — оператор умножения функций из $\mathfrak{D}_L$ на $\eta(P)$. В силу общей теоремы 19 достаточно установить полную непрерывность относительно A оператора K_1 умножения функций из $\mathfrak{D}_L$ на $|\eta(P)|$.

Выбрав по заданному δ радиус R шара x_R так, чтобы при $P \in x_R$ было $\frac{|\eta(P)|}{q(P)} < \delta^2$, имеем для любой функции $u \in \mathfrak{D}_L$

$$\begin{aligned} (K_1 u, u) &= \int_{\mathfrak{E}} |\eta(P)| \cdot |u(P)|^2 d\omega \leq \int_{x_R} |\eta(P)| \cdot |u(P)|^2 d\omega + \\ &+ \delta^2 \int_{\mathfrak{E} - x_R} q(P) |u(P)|^2 d\omega \leq \int_{x_R} |\eta(P)| |u(P)|^2 d\omega + \\ &+ \delta^2 \int_{\mathfrak{E}} (|\nabla u|^2 + q|u|^2) d\omega = \int_{x_R} |\eta(P)| \cdot |u(P)|^2 d\omega + \delta^2 (Au, u). \end{aligned}$$

Полученное неравенство аналогично неравенству (10) п° 8, и, как и в одномерном случае, достаточно доказать компактность множества функций $u \in F$, удовлетворяющих при некотором конечном M неравенству

$$\int_{\mathfrak{E}} (|\nabla u|^2 + q|u|^2) d\omega < M^2,$$

в метрике

$$[u, u]_{K_1} = \int_{x_R} |\eta(P)| \cdot |u(P)|^2 d\omega,$$

что следует непосредственно из известной леммы Ф. Реллиха (см. [54]).

19. Отрицательная часть спектра и квадратичный функционал. Как было отмечено в п^о 7, ограниченность или неограниченность снизу спектра $S(\tilde{L})$ в одномерном случае не зависит от значений коэффициентов дифференциальной операции вне окрестности сингулярного конца интервала. Первая часть настоящего пункта посвящена обобщению этого предложения на многомерный случай.

Для доказательства соответствующей теоремы, которую можно рассматривать как распространение теоремы 36 на случай $\lambda = -\infty$, понадобятся две следующие леммы.

Лемма 11 [31 (5)]. Если оператор $\tilde{L}$ обладает последовательностью собственных значений λ_n , сходящейся к минус бесконечности, а $\{\varphi_n\}$ есть соответствующая ортонормированная последовательность собственных функций, то для любой области $\omega \subset \Omega$ имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_{\omega} = 0. \quad (53)$$

Доказательство. Предположив противное, найдем число $\delta > 0$ такое, что для некоторой подпоследовательности собственных функций будет $\|\varphi_{n_k}\|_{\omega} > \delta$ ($k = 1, 2, \dots$) или, если ввести новую нумерацию для функций этой бесконечной подпоследовательности,

$$\|\varphi_k\|_{\omega} > \delta \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (54)$$

Выберем какую-нибудь область ω' ($\omega \subset \omega' \subset \Omega$) и построим в Ω дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\theta(P)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} \theta(P) &\equiv 1 & (P \in \omega), \\ \theta(P) &\equiv 0 & (P \in \overline{\omega'}), \\ 0 &\leq \theta(P) \leq 1 & (P \in \Omega). \end{aligned}$$

Полагая

$$\psi_k(P) = \theta(P) \varphi_k(P),$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{\omega'} l[\psi_k] \bar{\psi}_k d\omega &= \lambda_k \int_{\omega'} \theta^2 |\varphi_k|^2 d\omega - \\ &- \int_{\omega' - \omega} \theta \Delta \theta |\varphi_k|^2 d\omega - 2 \int_{\omega' - \omega} \langle \nabla \theta, \nabla \varphi \rangle \theta \bar{\varphi} d\omega, \end{aligned} \quad (55)$$

где

$$\langle \nabla \theta, \nabla \varphi \rangle = \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Так как левая часть $(\tilde{L}\psi_k, \psi_k)$ равенства (55) и первые два слагаемых правой части вещественны, то последнее слагаемое правой части также вещественно и, следовательно, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} \int_{\omega' - \omega} \langle \nabla \theta, \nabla \varphi \rangle \theta \bar{\varphi} d\omega + \int_{\omega' - \omega} \langle \nabla \theta, \nabla \bar{\varphi} \rangle \theta \varphi d\omega &= \\ &= \frac{1}{2} \int_{\omega' - \omega} \langle \nabla \theta^2, \nabla |\varphi|^2 \rangle d\omega. \end{aligned}$$

Далее, в силу формулы Грина имеем

$$\int_{\omega' - \omega} \langle \nabla \theta^2, \nabla |\varphi_k|^2 \rangle d\omega = - \int_{\omega' - \omega} |\varphi_k|^2 \Delta \theta^2 d\omega$$

и, следовательно, второе и третье слагаемые в (54) ограничены равномерно по k , так что

$$\int_{\omega'} l[\psi_k] \bar{\psi}_k d\omega < \lambda_k \int_{\omega} |\varphi_k|^2 d\omega + \mu,$$

где число μ не зависит от k .

Из полученного неравенства в силу предположения (54) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (l[\psi_k], \psi_k)_{\omega'} = -\infty,$$

а это противоречит очевидному неравенству

$$(l[\psi_k], \psi_k)_{\omega'} > (\psi_k, \psi_k)_{\omega'} \inf_{P \in \omega'} q(P).$$

Таким образом, предположение (54) отпадает и предельное соотношение (53) доказано.

Условимся называть последовательность функций $\{\psi_n\}$ из $\mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ *характеристической* для значения $\lambda = -\infty$, если

она ограничена в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ и удовлетворяет предельному соотношению $\lim_{n \rightarrow \infty} (\tilde{L}\varphi_n, \varphi_n) = -\infty$. Такая последовательность существует тогда и только тогда, когда оператор $\tilde{L}$ не ограничен снизу.

Следующее предложение распространяет лемму 10 на случай $\lambda = -\infty$.

Лемма 12 [31 (5)]. Если оператор $\tilde{L}$ не ограничен снизу и $\omega \subset \Omega$, то для значения $\lambda = -\infty$ существует характеристическая последовательность функций $\{\psi_n(P)\}$, тождественно равных нулю в области ω .

Доказательство. Если множество $C(\tilde{L})$ не ограничено снизу, то существование требуемой характеристической последовательности $\{\psi_n\}$ вытекает из леммы 10. Если же множество $C(\tilde{L})$ ограничено снизу, то из неограниченности снизу оператора $\tilde{L}$ вытекает существование у него последовательности собственных значений, стремящейся к минус бесконечности. Пользуясь предыдущей леммой 11 и фиксируя область ω' условием $\omega \subset \omega' \subset \Omega$, найдем нормированную последовательность $\{\varphi_n\}$ собственных функций оператора $\tilde{L}$, для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (L\varphi_n, \varphi_n) = -\infty$$

и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_{\omega'} = 0. \quad (56)$$

Положим теперь при $P \in \Omega$

$$\psi_n(P) = \theta(P) \varphi_n(P), \quad (57)$$

где $\theta(P)$ есть некоторая дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \theta(P) &\equiv 0 & (P \in \omega), \\ \theta(P) &\equiv 1 & (P \in \overline{\omega'}), \\ 0 &\leq \theta(P) \leq 1 & (P \in \Omega). \end{aligned}$$

Для последовательности $\{\psi_n\}$, как и при доказательстве предыдущей леммы, получаем

$$(\tilde{L}\psi_n, \psi_n) = \lambda_n \|\varphi_n\|_{\Omega-\omega'}^2 + \lambda_n \|\theta\varphi_n\|_{\omega'-\omega}^2 + \mu_n, \quad (58)$$

где величина μ_n остается при $n \rightarrow \infty$ ограниченной.

Так как, далее, имеет место (56), то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n\|_{\Omega-\omega'} = 1,$$

и из соотношения (58) следует, что функции (57) образуют искомую характеристическую последовательность.

Из доказанной леммы непосредственно вытекает

Теорема 40 [31 (5)]. Если расщепление оператора $\tilde{L}$ определено соотношениями (39), то операторы $\tilde{L}$ и L_0 одновременно ограничены или не ограничены снизу. В частности, когда область Ω есть бесконечная часть пространства $\mathbb{E}$, ограниченная одной замкнутой поверхностью ζ , или когда $\Omega = \mathbb{E}$, будут одновременно ограничены или не ограничены снизу операторы $\tilde{L}$ и L_Γ .

Из леммы 12 также следует, что, как и в одномерном случае, свойство ограниченности снизу спектра оператора, порождаемого операцией (1), не зависят от значений коэффициента $q(P)$ в любой области $\omega \subset \Omega$ (но теперь оно, вообще говоря, зависит от краевых условий на границе области Ω).

Отделенное на конечной границе σ области $\Omega = \Omega[\sigma, \zeta]$ D -регулярное краевое условие назовем *регулярным*, если в разложении (51) симметрический оператор $L_{\sigma\Gamma}$ ограничен снизу. Примером регулярного отделенного краевого условия на σ является условие вида $\left[\frac{\partial u}{\partial n} + \rho u \right]_{P \in \sigma} = 0$, где $\rho = \rho(P) \geq 0$.

Корректность приведенного определения, то есть независимость регулярности краевого условия от выбора поверхности расщепления Γ , вытекает из леммы 12.

Если на границе σ области $\Omega[\sigma, \zeta]$ задано регулярное условие, то утверждение леммы 12 остается, очевидно, в силе для любой лежащей в $\Omega[\sigma, \zeta]$ области ω вида

$$\omega = \Omega[\sigma, \Gamma].$$

Поэтому из леммы 12 вытекает еще

Теорема 40^{bis} [31 (5)]. Пусть $\tilde{L}_1$ есть самосопряженный оператор, порождаемый операцией (1) в области $\Omega[\sigma_1, \infty]$ с отделенным на σ_1 регулярным краевым условием, а $\tilde{L}_2$ — самосопряженный оператор, порождаемый той же операцией в области $\Omega[\sigma_2, \infty]$ с разделенными условиями, причем условия в бесконечности те же,

что и для $\tilde{L}_1$. Если оператор $\tilde{L}_1$ не ограничен снизу, то оператор $\tilde{L}_2$ также не ограничен снизу.

Дифференциальная операция (1) порождает квадратичный функционал

$$\Phi[u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\omega + \int_{\Omega} q |u|^2 d\omega,$$

который в этом пункте рассматривается лишь на финитных функциях из $\mathfrak{D}_L$.

Положим $\Omega = \mathfrak{E}$ и будем называть финитную функцию N -финитной, если она тождественно равна нулю внутри сферы $|OP| = N$.

Следующее предложение является обобщением первой части теоремы 28 на многомерный случай.

Теорема 41 [31 (10)]. Для того чтобы отрицательная часть спектра самосопряженного оператора $\tilde{L}$, определяемого операцией (1) в $\mathcal{L}_2(\mathfrak{E})$, не имела отличных от нуля предельных точек, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N_\varepsilon$ такое, что квадратичный функционал

$$\Phi_\varepsilon[u] = \int_{\mathfrak{E}} |\nabla u|^2 d\omega + \int_{\mathfrak{E}} q |u|^2 d\omega + \varepsilon \int_{\mathfrak{E}} |u|^2 d\omega$$

неотрицателен на всех N -финитных дважды непрерывно дифференцируемых функциях $u = u(P)$.

Доказательство. Если множество $(-\infty, 0) \cap S(\tilde{L})$ не имеет предельных точек, отличных от нуля, но при некотором $\varepsilon > 0$ не существует числа $N = N_\varepsilon$ с указанным в формулировке теоремы свойством, то можно построить бесконечную последовательность дважды непрерывно дифференцируемых финитных функций $\{\varphi_n\}$ с непересекающимися носителями, для которой будет

$$([L + \varepsilon I] \varphi_n, \varphi_n) < 0 \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Из этого неравенства, в силу теоремы 13 п° 3 следует бесконечность множества $(-\infty, -\varepsilon) \cap S(\tilde{L})$, что противоречит отсутствию у отрицательной части спектра $S(\tilde{L})$ отличной от нуля предельной точки.

Пусть, обратно, при любом $\varepsilon > 0$ существует число $N = N_\varepsilon$ с указанным выше свойством. Тогда минимальный оператор L , порождаемый операцией (1), будет ограничен снизу в силу теоремы 40. Отсюда в свою очередь на основании

теоремы 35 следует самосопряженность оператора L , так что $\tilde{L} = L$. Если бы теперь множество $(-\infty, 0) \cap S(L)$ имело бы отличную от нуля предельную точку λ ($-\infty < \lambda < 0$), то было бы $\lambda \in C(L)$ и, в силу леммы 10 п° 17, при любом $N > 0$ существовала бы для значения λ характеристическая последовательность $\{\psi_n\}$ дважды непрерывно дифференцируемых N -финитных функций. Для этой последовательности при положительном $\varepsilon_0 < -\lambda$ было бы

$$\Phi_{\varepsilon_0}[\psi_n] = ([L + \varepsilon_0 I] \psi_n, \psi_n) < 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

что противоречит существованию числа $N = N_{\varepsilon_0}$ с указанным в формулировке теоремы свойством. Таким образом, теорема доказана. Для квадратичного функционала $\Phi[u]$ также имеет место следующее элементарное предложение, соответствующее лемме 5 п° 10.

Лемма 13. Если дважды непрерывно дифференцируемая внутри ограниченной области Ω и непрерывная вплоть до границы S этой области функция $v(P)$ равна нулю при $P \in S$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует дважды непрерывно дифференцируемая в Ω и равная нулю вне некоторой области $\omega \subset \Omega$ функция $u(P)$ такая, что

$$|\Phi[u] - \Phi[v]| < \varepsilon.$$

Доказательство. Пусть $\omega_\delta \subset \Omega$ есть область с границей σ , каждая точка которой удалена от S на величину $\delta > 0$. Через $\theta_\delta(P)$ обозначим дважды непрерывно дифференцируемую в Ω функцию, равную единице при $P \in \omega$ и обращающуюся в нуль вблизи поверхности S . Можно считать*), что максимальная величина модуля градиента функции $\theta_\delta(P)$ имеет порядок δ^{-1} .

Полагая $v = \theta u$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi[u] - \Phi[v] &= \\ &= \int_{\Omega - \omega_\delta} (1 - \theta_\delta^2) (|\nabla u|^2 + q|u|^2) d\omega - \int_{\Omega - \omega_\delta} u^2 |\nabla \theta_\delta|^2 d\omega, \end{aligned}$$

и так как первый интеграл в правой части этого равенства стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$, то для доказательства леммы

*) См. подстрочное примечание на стр. 78.

остается установить это же для интеграла

$$\int_{\Omega - \omega_\delta} u^2 |\nabla \theta_\delta|^2 d\omega.$$

Но второй сомножитель под знаком этого интеграла имеет порядок δ^{-2} , а первый сомножитель u^2 в силу теоремы о среднем Лагранжа имеет порядок δ^2 , так что при $\delta \rightarrow 0$ этот интеграл стремится к нулю, и лемма доказана.

Примечание. Утверждение леммы остается в силе, если дополнительно потребовать ортогональность в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ искомой функции $v(P)$ к конечному числу функций, ортогональных в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ к $u(P)$. Это следует из леммы 3 п° 6, относящейся к плотным линейным многообразиям в абстрактном гильбертовом пространстве.

Лемма 13 позволяет соответствующим образом ослабить требование двукратной непрерывной дифференцируемости в условии теоремы 41.

Отметим еще, что теорема 41 в соответствующей формулировке сохраняет силу и для случая ограниченной области Ω , когда сингулярность задачи вызывается особенностями коэффициента на границе области. Правда, в этом случае полуограниченность оператора L уже не влечет его самосопряженности. Поэтому указанное в теореме 41 условие дискретности спектра левее нуля, являясь, очевидно, необходимым для любого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L , уже не является достаточным для всех таких расширений. Однако указанное в теореме 41 условие остается достаточным для дискретности левее нуля спектра $S(\mathring{L})$ жесткого расширения $\mathring{L}$ оператора L . Для доказательства следует воспользоваться тем, что в случае жесткого расширения имеем $\mathfrak{D}_{\mathring{L}} \subset H_{\mathring{L}}$ и что любую функцию $\varphi(P)$ из $\mathfrak{D}_{\mathring{L}}$, равную нулю в области $\omega \subset \Omega$, можно L -аппроксимировать финитными в Ω функциями из $\mathfrak{D}_{\mathring{L}}$, равными нулю в области ω . Для доказательства последнего утверждения следует вначале L -приблизиться к $\varphi(P)$ финитной в Ω функцией $\psi(P) \in \mathfrak{D}_{\mathring{L}}$, а затем L -приблизиться к $\psi(P)$ дважды непрерывно дифференцируемой финитной функцией, равной нулю в ω . Последнее может быть достигнуто благодаря малости функции $\psi(P)$ и модуля ее градиента в $\mathcal{L}_2(\omega)$.

Таким образом устанавливается используемая далее в п° 47

Теорема 41^{bis}. Для того чтобы отрицательная часть спектра жесткого расширения $\mathring{L}$ оператора L , определяемого операцией (1) в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, не имела отличных от нуля предельных точек, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовала внутри Ω область ω такая, что квадратичный

$$\Phi_\varepsilon[u] = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 d\omega + \int_{\Omega} q |u|^2 d\omega + \varepsilon \int_{\Omega} |u|^2 d\omega$$

неотрицателен для всех дважды непрерывно дифференцируемых и финитных в Ω функций, равных нулю в области ω .

Деформацию произвольной области $\Omega \subset \mathbb{E}$ будем называть *финитной*, если она изменяет лишь ограниченную часть границы области Ω .

Пусть $\tilde{L}_1$ есть самосопряженный оператор в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, порождаемый операцией (1) с единственной сингулярной точкой в бесконечности и краевым условием $\frac{\partial u}{\partial n} + \rho u = 0$ ($0 \leq \rho(P) \leq \infty$) на границе области Ω .

Через $\tilde{L}_2$ обозначим оператор, полученный из $\tilde{L}_1$, при финитной деформации области, с каким-нибудь условием того же вида на новых участках границы и произвольным финитным изменением потенциала с сохранением его непрерывной дифференцируемости.

Из результатов п°п° 17 и 19 следует, что

$$C(\tilde{L}_1) = C(\tilde{L}_2)$$

и, кроме того, точка $\lambda = -\infty$ одновременно принадлежит или не принадлежит $S(\tilde{L}_1)$ и $S(\tilde{L}_2)$. Но вопрос о совпадении типов точек из $C(\tilde{L}_1)$ и $C(\tilde{L}_2)$ остается открытым даже при изменении одного лишь краевого условия на конечном куске границы области Ω или при финитном изменении одного лишь потенциала.

Остановимся подробнее на вопросе о типе первой точки λ_0 непрерывной части спектра оператора $\tilde{L}_1$. Не ограничивая общности, примем $\lambda_0 = 0$ и будем различать случаи, когда отрицательная часть спектра есть бесконечное множество (случай *af*) и когда она конечна (случай *f*).

Если отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}_1$ простирается в $-\infty$, то инвариантность свойства *af* по отношению к финитному возмущению потенциала, конечной части границы и краевого условия на ней вытекает из теоремы 40.

В общем случае вопрос о сохранении свойств *f* и *af* при указанных выше возмущениях остается открытым. Предположим дополнительно, что свойством *f* (соответственно *af*) вместе с $\tilde{L}_1$ обладает и оператор, порождаемый операцией $-(1 - \theta)\Delta u + q_1 u$ (соответственно $-(1 + \theta)\Delta u + q_1 u$) при некотором $\theta > 0$ и тех же условиях на границе S области Ω (усиленные свойства *f* и *af*). Можно показать [33], что усиленные свойства *f* и *af* инвариантны по отношению к финитным возмущениям потенциала $q(P)$, конечной части σ границы S и функции $\rho(P) \geq 0$ в краевом условии $\frac{\partial u}{\partial n} + \rho u = 0$ на σ . В случае, когда на варьируемой части σ границы S задано условие $u = 0$, это утверждение остается справедливым, если и после деформации сохранить на σ нулевое краевое условие.

20. Пространства С. Л. Соболева и принцип расщепления. Обоснование принципа расщепления, проведенное в п° 17 с помощью леммы 10 для простейшей эллиптической дифференциальной операции (1) с тремя независимыми переменными, допускает распространение на эллиптические операции общего вида с любым числом независимых переменных. При этом вместо непосредственного использования интегралов типа потенциала целесообразно применить основанные на их исследовании теоремы вложения.

Пусть ω есть ограниченная область m -мерного евклидова пространства $\mathbb{E}_m$ точек P с координатами $(x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Для построения пространства С. Л. Соболева (см., например, [89]) сначала вводится множество W всех функций $u(P)$, имеющих в ω частные производные по всем координатам до порядка r включительно, непрерывные вплоть до границы S области ω .

Определяя норму любой функции $u \in W$ выражением

$$\left\{ \int_{\omega} \left(\sum_{k=0}^r \sum_{s_1, s_2, \dots, s_k=1}^m \left| \frac{\partial^k u}{\partial x_{s_1} \partial x_{s_2} \dots \partial x_{s_k}} \right|^2 \right) d\omega \right\}^{1/2}$$

и замыкая множество W в этой норме, получаем пространство С. Л. Соболева $W_2^{(r)}(\omega)$.

При любом натуральном r пространство $W_2^{(r)}(\omega)$ является гильбертовым. В частности, при $r=0$ будет

$$\|u\|_{W_2^{(0)}(\omega)}^2 = \int_{\omega} |u|^2 d\omega = \|u\|_{\mathcal{L}_2(\omega)}^2,$$

а при $r=1$ и $r=2$ имеем соответственно

$$\|u\|_{W_2^{(1)}(\omega)}^2 = \int_{\omega} \left(|u|^2 + \sum_{s=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 \right) d\omega = \int_{\omega} (|u|^2 + |\nabla u|^2) d\omega$$

и

$$\|u\|_{W_2^{(2)}(\omega)}^2 = \int_{\omega} \left(|u|^2 + \sum_{s=1}^m \left| \frac{\partial u}{\partial x_s} \right|^2 + \sum_{s,t=1}^m \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_s \partial x_t} \right|^2 \right) d\omega.$$

Из теорем С. Л. Соболева и В. И. Кондрашева следует, что при $r' > r$ будет

$$W_2^{(r')}(\omega) \subset W_2^{(r)}(\omega)$$

и что оператор вложения из $W_2^{(r')}(\omega)$ в $W_2^{(r)}(\omega)$ является вполне непрерывным [90 (2)].

Введем теперь симметрическую эллиптическую операцию второго порядка общего вида

$$l[u] = \sum_{j, k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk} \frac{\partial u}{\partial x_k} + qu \quad (59)$$

с вещественными коэффициентами $a_{jk}(P) = a_{kj}(P)$ ($j, k = 1, 2, \dots, m$) и $q(P)$, определенными в области Ω пространства $\mathcal{E}_m$ (в частности, может быть $\Omega = \mathcal{E}_m$). При этом предполагается, что в каждой ограниченной области $\omega \subset \Omega$ коэффициенты $a_{jk}(P)$ непрерывны и обладают ограниченными обобщенными производными первого порядка [89], а функция $q(P)$ измерима и ограничена в ω . Эллиптичность операции (59) означает, что в каждой области $\omega \subset \Omega$ квадратичная форма

$$\sum_{j, k=1}^m a_{jk}(P) \xi_j \xi_k$$

имеет не зависящую от точки $P \in \omega$ положительную нижнюю грань $\alpha = \alpha(\omega)$, так что

$$\sum_{j, k=1}^m a_{jk}(P) \xi_j \xi_k \geq \alpha \sum_{j=1}^m \xi_j^2.$$

Минимальный оператор L определяется как замыкание симметрического оператора $\dot{L}$, порождаемого в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ операцией (59) на дважды непрерывно дифференцируемых финитных функциях. Включение операции (59) в теорию симметрических операторов и теоретико-функциональная характеристика областей определения порождаемых ею операторов даны в статьях О. А. Ладыженской [57] и М. Ш. Бирмана [13 (1)], [13 (4)].

Обобщить приведенное в п° 17 доказательство леммы о расщеплении на случай операции (59) можно, как заметил М. Ш. Бирман, следующим образом.

Пусть $\omega \subset \Omega$. Не ограничивая общности, будем считать выполненным в некоторой области ω' ($\omega \subset \omega' \subset \Omega$) неравенство

$$q(P) \geq q_0 > 0 \quad (P \in \omega'), \quad (60)$$

которое можно обеспечить, прибавляя к функции $q(P)$ достаточно большую положительную константу μ и заменяя λ на $\lambda + \mu$. Через L_S обозначим регулярный самосопряженный

оператор, определяемый операцией (59) с краевым условием

$$u(P)|_{P \in S} = 0.$$

Пусть, далее, $\{f_n\}$ есть некоторая ортонормированная характеристическая последовательность для данного $\lambda \in C(\tilde{L})$. В силу замечания в п° 3 (стр. 32) ее можно считать вещественной. При этом для некоторого $a > 0$ при всех n будет

$$\|\tilde{L}f_n\| \leq \|\tilde{L}f_n - \lambda f_n\| + |\lambda| \|f_n\| < a + |\lambda|. \quad (61)$$

Введем еще область ω'' ($\omega \subset \omega'' \subset \omega'$) и через $\theta_1(P)$ обозначим дважды непрерывно дифференцируемую в области Ω функцию, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned} \theta_1(P) &\equiv 1 & (P \in \omega''), \\ \theta_1(P) &\equiv 0 & (P \notin \omega'), \\ 0 &\leq \theta_1(P) \leq 1 & (P \in \Omega). \end{aligned}$$

Полагая

$$L_S[\theta_1 f_n] = g_n \quad (62)$$

и пользуясь неравенством (60), получаем

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{W_2^{(1)}(\omega'')}^2 &\leq \|\theta_1 f_n\|_{W_2^{(1)}(\omega')}^2 \leq c^2 (L_S \theta_1 f_n, \theta_1 f_n)_{\mathcal{L}_2(\omega')} = \\ &= c^2 \left\| L_S^{-\frac{1}{2}} g_n \right\|_{\mathcal{L}_2(\omega')} \end{aligned}$$

или

$$\|f_n\|_{W_2^{(1)}(\omega'')} \leq c \left\| L_S^{-\frac{1}{2}} g_n \right\|_{\mathcal{L}_2(\omega')}. \quad (63)$$

Теперь докажем компактность последовательности $\{f_n\}$ в метрике $W_2^{(1)}(\omega'')$. Для этого достаточно установить ограниченность в $\mathcal{L}_2(\omega')$ последовательности $\{g_n\}$, определенной равенством (62), ибо оператор $L_S^{-\frac{1}{2}}$ в (63) вполне непрерывен.

Имеем

$$\begin{aligned} g_n = l[\theta_1 f_n] &= \theta_1 l[f_n] - 2 \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k} + \\ &+ f_n \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk} \frac{\partial \theta_1}{\partial x_k}, \end{aligned}$$

ТАК ЧТО

$$\begin{aligned} \|g_n\| &< \|l[f_n]\|_{\mathcal{L}_2(\omega')} + C \left\{ \sum_{k=1}^m \left\| \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \right\|_{\mathcal{L}_2(\omega')} + \|f_n\|_{\mathcal{L}_2(\omega')} \right\} < \\ &< \|\tilde{L}f_n\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} + mC \|f_n\|_{W_2^{(1)}(\omega')}. \end{aligned} \quad (64)$$

Первое слагаемое в правой части полученного неравенства (64) ограничено в силу (61), и для доказательства леммы остается установить ограниченность второго слагаемого, то есть ограниченность последовательности $\{f_n(P)\}$ в метрике $W_2^{(1)}(\omega')$.

Для получения нужной оценки величины $\|f_n\|_{W_2^{(1)}(\omega')}$ построим функцию $\theta_2(P)$ для областей ω'' и ω' ($\omega' \subset \omega'' \subset \Omega$) так же, как строили функцию $\theta_1(P)$ для областей ω' и ω ($\omega \subset \omega' \subset \Omega$). При этом можем считать в области ω'' выполненным неравенство (60).

Имеем для вещественной последовательности $\{f_n\}$

$$\begin{aligned} \int_{\omega''} l[f_n] \theta_2 f_n d\omega &= \int_{\omega''} \theta_2 \left\{ \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} + q f_n^2 \right\} d\omega + \\ &+ \int_{\omega''} f_n \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k} d\omega, \end{aligned}$$

НО

$$\begin{aligned} \int_{\omega''} f_n \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k} d\omega &= \frac{1}{2} \int_{\omega''} \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial f_n^2}{\partial x_j} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k} d\omega = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\omega''} f_n^2 \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k} d\omega, \end{aligned}$$

ТАК ЧТО

$$\begin{aligned} \int_{\omega''} \theta_2 \left\{ \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} + q f_n^2 \right\} d\omega &= \\ &= \int_{\omega''} l[f_n] \theta_2 f_n d\omega + \frac{1}{2} \int_{\omega''} f_n^2 \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk} \frac{\partial \theta_2}{\partial x_k} d\omega. \end{aligned} \quad (65)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{W_2^{(1)}(\omega')}^2 &\leq C^2 \int_{\omega'} \left\{ \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} + q f_n^2 \right\} d\omega < \\ &\leq C^2 \int_{\omega''} \theta_2 \left\{ \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \frac{\partial f_n}{\partial x_k} + q f_n^2 \right\} d\omega. \end{aligned} \quad (66)$$

Из (65) и (66) следует неравенство

$$\begin{aligned} \|f_n\|_{W_2^{(1)}(\omega')}^2 &\leq C^2 (l[f_n], \theta_2 f_n)_{\mathcal{L}_2(\omega'')} + C_1 \|f_n\|_{\mathcal{L}_2(\omega'')}^2 \leq \\ &\leq C^2 \left\{ \|\tilde{L}f_n\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} + \|f_n\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \right\} \cdot \|f_n\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)}, \end{aligned}$$

откуда вытекает ограниченность в $W_2^{(1)}(\omega')$ последовательности $\{f_n\}$.

Таким образом, компактность характеристической последовательности $\{f_n\}$ в $W_2^{(1)}(\omega'')$ доказана.

Не ограничивая общности, будем считать всю характеристическую последовательность $\{f_n\}$ сходящейся в $W_2^{(1)}(\omega'')$. Тогда последовательность функции $\{u_n\}$, определяемых равенством

$$u_n(P) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{f_{2n}(P) - f_{2n-1}(P)\},$$

является, очевидно, характеристической для значения $\lambda \in C(\tilde{L})$ и в метрике $W_2^{(1)}(\omega'')$ она сходится к нулю.

Для построения искомой последовательности $\{v_n\}$ положим, как и ранее в п° 17,

$$v_n(P) = \theta(P) u_n(P) \quad (P \in \Omega), \quad (67)$$

где $\theta(P)$ — какая-нибудь дважды непрерывно дифференцируемая в Ω функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} \theta(P) &\equiv 0 & (P \in \omega), \\ \theta(P) &\equiv 1 & (P \in \omega''), \\ 0 &\leq \theta(P) \leq 1 & (P \in \Omega''), \end{aligned}$$

и покажем, что последовательность $\{v_n\}$ обладает всеми требуемыми свойствами.

Очевидно,

$$v_n(P) \equiv 0 \quad (P \in \omega; n = 1, 2, \dots),$$

и остается установить, что последовательность $\{v_n\}$ является характеристической для значения $\lambda \in C(\tilde{L})$.

Ограниченность последовательности $\{v_n\}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ непосредственно вытекает из (67). Некомпактность ее в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ устанавливается так же, как и в п° 17.

Наконец,

$$l[v_n] - \lambda v_n = \theta(l[u_n] - \lambda u_n) - 2 \sum_{j,k=1}^m a_{jk} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} \frac{\partial u_n}{\partial x_k} - \\ - u_n \sum_{j,k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_j} a_{jk} \frac{\partial \theta}{\partial x_k}$$

и, следовательно,

$$\|\tilde{L}v_n - \lambda v_n\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} \leqslant \\ \leqslant \|Lu_n - \lambda u_n\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} + A \sum_{k=1}^m \left\| \frac{\partial u}{\partial x_k} \right\|_{\mathcal{L}_2(\omega'')} + B \|u_n\|_{\mathcal{L}_2(\omega'')},$$

где A и B — некоторые положительные постоянные.

Из полученного неравенства, в силу сходимости к нулю последовательности $\{u_n\}$ в метрике $W_2^{(1)}(\omega'')$, вытекает предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{L}v_n - \lambda v_n\|_{\mathcal{L}_2(\Omega)} = 0.$$

Тем самым лемма о расщеплении для операции (59) доказана.

§ 4. J -самосопряженные операторы

21. Область значений квадратичного функционала и внешнее поле регулярности линейного оператора. Если оператор A симметрический, то множество значений квадратичного функционала $\Phi[f] = (Af, f)$ при $\|f\| = 1$ ($f \in \mathfrak{D}_A$) лежит на вещественной оси. Оно, очевидно, связно, так как вместе со значениями $\Phi[f_1] = \lambda_1$ и $\Phi[f_2] = \lambda_2$ ($\|f_1\| = \|f_2\| = 1$) вещественная непрерывная функция

$$F(t) = \Phi\left[\frac{f}{\|f\|}\right],$$

где $f = (1-t)f_1 + tf_2$, принимает при $0 \leqslant t \leqslant 1$ все промежуточные значения между λ_1 и λ_2 .

Обозначим замыкание множества значений квадратичного функционала (Af, f) при $\|f\|=1$ ($f \in \mathfrak{D}_A$) через $K(A)$, а его дополнение до всей λ -плоскости — через $R(A)$.

Если $K(A)$ покрывает всю λ -ось, то $R(A)$ состоит из верхней и нижней λ -полуплоскостей, всегда принадлежащих полю регулярности $\Pi(A)$ симметрического оператора A . Если же множество $K(A)$ не покрывает всю λ -ось, то оно является отрезком либо полуосью. При этом оператор A ограничен или полуограничен и часть вещественной λ -оси, свободная от точек $K(A)$, также принадлежит $\Pi(A)$.

Таким образом, в случае симметрического оператора A всегда

$$R(A) \subset \Pi(A). \quad (1)$$

Имея в виду обобщить включение (1) на случай любых замкнутых операторов T , рассмотрим сначала случай диссипативных операторов.

Замкнутый оператор T с плотной в H областью определения $\mathfrak{D}_T$ называется *диссипативным*, если

$$\operatorname{Im}(Tf, f) \geq 0$$

при всех $f \in \mathfrak{D}_T$.

Если оператор T диссипативен, то при любом $f \in \mathfrak{D}_T$ и $\operatorname{Im} \lambda < 0$ из равенства

$$Tf - \lambda f = g$$

или

$$(Tf, f) - \lambda(f, f) = (g, f)$$

следует неравенство

$$|\operatorname{Im} \lambda| \cdot (f, f) \leq \operatorname{Im}(g, f) \leq |(g, f)| \leq \|g\| \cdot \|f\|,$$

откуда

$$\|f\| \leq \frac{1}{|\operatorname{Im} \lambda|} \|g\|. \quad (2)$$

Из полученного неравенства (2) следует, что нижняя λ -полуплоскость принадлежит полю регулярности диссипативного оператора T .

Переходя к произвольным замкнутым линейным операторам T , обозначим через $K(T)$ замыкание области значений квадратичного функционала (Tf, f) при $\|f\|=1$ ($f \in \mathfrak{D}_T$).

Теорема 42. Для любого замкнутого линейного оператора T в H совокупность значений квадратичного функционала (Tf, f) при $\|f\|=1$ ($f \in \mathfrak{D}_T$) есть

некоторое выпуклое множество комплексной λ -плоскости. Если точка λ не принадлежит замыканию $K(T)$ этого множества, то она является точкой регулярного типа оператора T и

$$\|(T - \lambda I)f\| \geq \delta \|f\|, \quad (3)$$

где δ есть расстояние точки λ от множества $K(T)$.

Доказательство первого утверждения (см. [94]) следует из известной теоремы Хаусдорфа [104], согласно которой множество $K(A)$ выпукло в конечномерном случае.

Действительно, пусть точки $\lambda_1 = (Tf_1, f_1)$ и $\lambda_2 = (Tf_2, f_2)$ ($\|f_1\| = \|f_2\| = 1$) принадлежат $K(T)$, а λ — любая точка отрезка, соединяющего точки λ_1 и λ_2 .

Обозначая через P оператор проектирования на линейную оболочку $\mathfrak{E}$ векторов f_1 и f_2 , имеем

$$(Tf_1, f_1) = (Tf_1, Pf_1) = (PTf_1, f_1),$$

$$(Tf_2, f_2) = (Tf_2, Pf_2) = (PTf_2, f_2),$$

и, согласно теореме Хаусдорфа для двумерного случая (см. [107]), существует нормированный вектор $f \in \mathfrak{E}$, для которого $(PTf, f) = \lambda$.

Таким образом,

$$\lambda = (PTf, f) = (Tf, Pf) = (Tf, f)$$

и выпуклость множества $K(T)$ в общем случае доказана.

Пусть теперь $\lambda_0 \notin K(T)$ и ω_0 есть точка множества $K(T)$, в которой достигается расстояние точки λ_0 от $K(T)$. Обозначим через $\mathfrak{G}$ прямую, проходящую через ω_0 и перпендикулярную к отрезку, соединяющему точки λ_0 и ω_0 . Эта прямая $\mathfrak{G}$ будет, очевидно, опорной прямой выпуклого множества $K(T)$ в точке ω_0 .

Если теперь прямая $\mathfrak{G}$ совпадает с вещественной λ -осью, то оператор T диссипативен и (3) вытекает из (2). В общем случае построим линейное преобразование

$$\mu = a\lambda + b \quad (|a| = 1),$$

переводящее прямую $\mathfrak{G}$ в прямую $\text{Im } \mu = 0$, так чтобы полуплоскость, в которой лежит множество $K(T)$, перешла в полуплоскость $\text{Im } \mu > 0$.

Оператор $S = aT + bI$ является, очевидно, диссипативным, и так как точка $\mu_0 = a\lambda_0 + b$ лежит в нижней μ -полу-

плоскости, то, согласно (2), будет

$$\|Sf - \mu_0 f\| \geq |\operatorname{Im} \mu_0| \cdot \|f\| = \delta \|f\|,$$

но $S - \mu_0 I = T - \lambda_0 I$, и теорема доказана.

Часть $R(T)$ поля регулярности $\Pi(T)$ будем называть *внешним полем регулярности*. Являясь дополнением выпуклого множества до всей плоскости, внешнее поле регулярности $R(T)$ не более чем двусвязно.

Если внешнее поле регулярности односвязно, то во всех точках $\lambda \in R(T)$ дефектное число $m(\lambda)$ многообразия $(T - \lambda I) \mathfrak{D}_T$ одинаково, а в случае двусвязности это число $m(\lambda)$ постоянно в каждой из двух связных компонент области $R(T)$.

Число $m(\lambda)$ при $\lambda \in R(T)$ назовем *внешним дефектным числом* линейного оператора T . Таким образом, каждый замкнутый линейный оператор T , для которого множество $R(T)$ не пусто, имеет одно или два внешних дефектных числа, которые могут оказаться одинаковыми.

Внутри $K(T)$ также могут находиться точки регулярного типа оператора T , но в них значения $m(\lambda)$ могут не совпадать с внешними дефектными числами.

В заключение пункта напомним, что *характеристикой* замкнутого линейного оператора T (см. [36]) в данной точке λ называется пара чисел $\{n(\lambda), m(\lambda)\}$, где $n(\lambda)$ есть размерность нулевого подпространства оператора $T - \lambda I$. Если оба числа $n(\lambda)$ и $m(\lambda)$ конечны, то характеристика оператора T в точке λ называется *конечной*.

22. J -симметрические операторы и их J -самосопряженные расширения. Линейный оператор A с плотной в H областью определения $\mathfrak{D}_A$ назовем *J -симметрическим*, если для некоторого оператора сопряжения J в H

$$JAJ \subset A^*; \quad (4)$$

если, в частности,

$$JAJ = A^*,$$

то оператор A назовем *J -самосопряженным*. Из (4) следует, что любой J -симметрический оператор допускает замыкание. Поэтому в дальнейшем абстрактно заданный J -симметрический оператор всегда будем считать замкнутым.

Для J -симметрических операторов (как и для симметрических операторов) при любом λ имеет место неравенство

$$n(\lambda) \leq m(\lambda), \quad (5)$$

где числа $n(\lambda)$ и $m(\lambda)$ определены, как в предыдущем пункте.

Действительно, если оператор A является J -симметрическим и $(A - \lambda I)h = 0$, то также $JAJ \cdot Jh - \bar{\lambda}Jh = 0$, откуда, в силу (4), $(A^* - \bar{\lambda}I)Jh = 0$, так что $Jh \perp (A - \lambda I)\mathfrak{D}_A$ и, следовательно $n(\lambda) \leq m(\lambda)$.

Из приведенного рассуждения следует, что для J -самосопряженных операторов при любом λ

$$n(\lambda) = m(\lambda), \quad (6)$$

откуда, в частности, вытекает, что J -самосопряженные операторы (как и самосопряженные операторы) не имеют остаточного спектра.

Если A есть J -самосопряженный оператор, то в любой точке λ его поля регулярности $m(\lambda) = 0$, и обратно, если $m(\lambda) = 0$ в некоторой точке λ поля регулярности J -симметрического оператора A , то этот оператор A является J -самосопряженным.

Действительно, если $A = JA^*J$, но при некотором $\lambda \in \Pi(A)$ имеет место $m(\lambda) \neq 0$, то, в силу (6), будет также $n(\lambda) \neq 0$, что противоречит принадлежности точки λ множеству $\Pi(A)$.

Пусть, обратно, $m(\lambda) = 0$ при некотором $\lambda \in \Pi(A)$, так что

$$(A - \lambda I)\mathfrak{D}_A = H,$$

откуда также

$$(JAJ - \bar{\lambda}I)J\mathfrak{D}_A = H. \quad (7)$$

Если бы было $JAJ \neq A^*$, то существовал бы элемент $f \in \mathfrak{D}_{A^*}$, не принадлежащий $\mathfrak{D}_{JAJ}$. Положив

$$(A^* - \bar{\lambda}I)f = h, \quad (8)$$

отметим, что, с другой стороны, в силу (7), существует элемент $g \in \mathfrak{D}_{JAJ}$ такой, что $(JAJ - \bar{\lambda}I)g = h$, или в силу (4),

$$(A^* - \bar{\lambda}I)g = h. \quad (9)$$

Из (8) и (9) для $\psi = g - f$ следует

$$A^*\psi - \bar{\lambda}\psi = 0. \quad (10)$$

Так как $m(\lambda) = 0$, то равенство (10) возможно лишь при $\psi = 0$, откуда получаем, что $g = f$, а это невозможно, так как $g \in \mathfrak{D}_{JAJ}$, а $f \notin \mathfrak{D}_{JAJ}$. Таким образом, должно быть $JAJ = A^*$, что и требовалось установить.

Из доказанного предложения следует, что если $m(\lambda_0) = 0$ в некоторой точке λ_0 регулярного типа J -симметрического

оператора A , то $m(\lambda) = 0$, в любой точке λ поля регулярности, которое может и не быть связным.

Пользуясь аналогом формул Неймана — Вишика [24 (1)] для области определения самосопряженного оператора, можно показать [43], что во всех точках λ поля регулярности J -симметрического оператора A число $m(\lambda)$ имеет одно и то же значение, которое в дальнейшем называется *дефектным числом* оператора A и обозначается через $\text{Def } A$. Можно также показать [31 (8)], что если внешнее поле регулярности оператора A (или, более общим образом, его поле регулярности $\Pi(A)$ [43]) не пусто, то он допускает J -самосопряженные расширения, сохраняющие принадлежность полю регулярно заданной точки $\lambda \in \Pi(A)$. В [26] установлено существование J -самосопряженного расширения любого J -симметрического оператора.

23. Некоторые спектральные свойства J -самосопряженных расширений J -симметрических операторов с конечным дефектным числом. Приводимые ниже свойства спектра J -самосопряженных расширений $\tilde{A}$ J -симметрического оператора A с конечным дефектным числом непосредственно следуют из общих теорем теории линейных уравнений в нормированных пространствах, установленных в [77] и развитых в ряде других статей (см. [36]).

Приведем без доказательства формулировку двух таких общих теорем и другие необходимые сведения из теории линейных уравнений в нормированных пространствах. Эти сведения и доказательство дальнейших теорем 41 и 42 легко найти в цитированной выше фундаментальной статье М. Г. Крейна и И. Ц. Гохберга ([36], теоремы 3.3 и 4.2).

Пусть T есть произвольный замкнутый линейный оператор в H , а $\Phi(T)$ — множество всех точек λ -плоскости, в которых характеристика оператора $T - \lambda I$ конечна и многообразие $(T - \lambda I) \mathfrak{D}_T$ замкнуто. Множество $\Phi(T)$ является открытым и, следовательно, состоит из конечного или счетного числа связных компонент.

Теорема 43 [36]. Если T есть замкнутый линейный оператор и G — некоторая связная компонента области $\Phi(T)$, то во всех точках $\lambda \in G$, за исключением, быть может, некоторых изолированных точек, величина $n(\lambda)$ имеет постоянное значение $n(\lambda) = n$, а в упомянутых изолированных точках будет

$$n(\lambda) > n.$$

Следующая теорема показывает, что хотя всегда кратность собственного значения не превосходит его ранга, но при некоторых условиях из конечности кратности собственного значения следует конечность его ранга.

Теорема 44 [36]. Если число $\lambda_0 \in \Phi(T)$ является изолированным собственным значением замкнутого линейного оператора T в H , то ранг r собственного значения λ_0 конечен и соответствующее корневое подпространство отделимо (см. п° 1). При этом из конечности ранга r следует однозначность представления пространства H в виде, указанном в п° 1 главы I.

Из общих теорем 43 и 44 вытекает следующее предложение относительно характера спектра J -самосопряженных расширений J -симметрического оператора A с конечным дефектным числом в его внешнем поле регулярности $R(A)$.

Теорема 45. Если A есть J -симметрический оператор с конечным дефектным числом, а $\tilde{A}$ — его любое J -самосопряженное расширение, то:

1. В области $R(A)$ не существует других точек спектра оператора $\tilde{A}$, кроме его собственных значений.

2. Либо каждая точка по крайней мере одной из связных компонент области $R(A)$ является собственным значением оператора $\tilde{A}$, либо спектр оператора $\tilde{A}$ не имеет конечных предельных точек внутри $R(A)$.

3. В последнем случае, когда множество собственных значений оператора $\tilde{A}$, лежащее в данной связной компоненте области $R(A)$, является изолированным, ранг каждого собственного числа λ_0 из этой компоненты конечен и соответствующее корневое подпространство G_{λ_0} отделимо по формуле

$$H = G_{\lambda_0} \dot{+} F_{\lambda_0}, \quad (11)$$

где

$$F_{\lambda_0} = H \ominus JG_{\lambda_0}. \quad (12)$$

Доказательство. Так как расширение $\tilde{A}$ оператора A конечномерно, то

$$C(\tilde{A}) \cap R(A) = C(A) \cap R(A) = 0, \quad (13)$$

а так как, кроме этого, из J -самосопряженности оператора $\tilde{A}$ следует отсутствие у него остаточного спектра, то утверждение 1 доказано.

Далее, из (13) следует замкнутость многообразия $(\tilde{A} - \lambda I) \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ при любом $\lambda \in R(A)$, а так как, кроме этого, конечномерность расширения $\tilde{A}$ влечет конечность величины $n(\lambda)$, то

$$R(A) \subset \Phi(\tilde{A}). \quad (14)$$

Если теперь в некоторой компоненте области $R(A)$ существует точка $\lambda_0 \in S(\tilde{A})$, так что $n(\lambda_0) = 0$, то, в силу теоремы 43, равенство $n(\lambda_0) = 0$ должно иметь место во всех точках рассматриваемой связной компоненты, за исключением, быть может, некоторых изолированных точек.

Таким образом, утверждение 2 также доказано.

Далее, в силу включения (14), утверждение 3 без утверждения (12) непосредственно следует из теоремы 44.

Переходя к доказательству указанного в п. 3 теоремы способа отделения корневого подпространства, отметим сначала, что подпространство F_{λ_0} , определяемое соотношением (12), инвариантно относительно оператора $\tilde{A}$. Действительно, если $f \in F_{\lambda_0} \cap \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$, то $f \perp JG_{\lambda_0}$, и так как при любом $g \in G_{\lambda_0}$ будет $\tilde{A}g \in G_{\lambda_0}$, то $(\tilde{A}f, Jg) = (f, J\tilde{A}g) = 0$, то есть $\tilde{A}f \in F_{\lambda_0}$.

Теперь остается установить, что подпространства G_{λ_0} и $H \ominus JG_{\lambda_0}$ линейно независимы, дают в сумме все пространство H и что при этом оператор $\tilde{A} - \lambda_0 I$ непрерывно обратим в F_{λ_0} .

Доказательство независимости подпространств G_{λ_0} и $H \ominus JG_{\lambda_0}$ не представляет затруднений, если заимствовать соответствующие рассуждения из линейной алгебры (см. [65]).

Из линейной независимости подпространств G_{λ_0} и $H \ominus JG_{\lambda_0}$ следует, что их прямая сумма совпадает с H . Действительно, в противном случае существовал бы элемент $h \neq 0$, ортогональный к G_{λ_0} и $H \ominus JG_{\lambda_0}$, то есть принадлежащий к подпространствам $H \ominus JG_{\lambda_0}$ и JG_{λ_0} , что невозможно, так как подпространства $J(H \ominus JG_{\lambda_0})$ и JG_{λ_0} линейно независимы вместе с G_{λ_0} и $H \ominus JG_{\lambda_0}$.

Из линейной независимости подпространств G_{λ_0} и $H \ominus JG_{\lambda_0}$ следует также непрерывная обратимость оператора $\tilde{A} - \lambda_0 I$ в $F_{\lambda_0} = H \ominus JG_{\lambda_0}$. Действительно, в противном случае в F_{λ_0} существовал бы собственный вектор оператора $\tilde{A}$, соответствующий значению λ_0 , но такой собственный вектор должен принадлежать G_{λ_0} , что снова противоречит линейной независимости подпространств G_{λ_0} и $H \ominus JG_{\lambda_0}$.

Однозначное представление любого элемента $h \in H$ в виде

$$h = g + f \quad (g \in G_{\lambda_0}, f \in H \ominus JG_{\lambda_0})$$

определяет операторы P и Q неортогонального проектирования по формулам

$$Ph = g, \quad Qh = (I - P)h = f.$$

Так как всегда $Ph \in \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$, то из включения $h \in \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ следует включение $Qh \in \mathfrak{D}_{\tilde{A}}$.

Теперь утверждение 3 установлено и теорема доказана полностью.

24. J -симметрические дифференциальные операторы.

Одномерная J -симметрическая дифференциальная операция имеет тот же вид, что и симметрическая операция (1) $n^\circ 7$, но коэффициенты $p_k(x)$ ($k = 0, 1, \dots, n$) уже не предполагаются вещественными. Простейшая многомерная J -симметрическая операция имеет вид (1) $n^\circ 15$, где потенциал $q(P)$ предполагается комплекснозначным. При этом здесь и далее операция J в функциональном пространстве означает комплексное сопряжение, так что $Jf(P) = \overline{f(P)}$.

Построение минимального J -симметрического оператора L проводится аналогично симметрическому случаю.

Обозначим через $\tilde{L}$ некоторое J -самосопряженное расширение оператора L .

Ограничимся в этом пункте простейшими J -симметрическими дифференциальными операциями

$$-y'' + q(x)y \quad (-\infty < x < \infty) \quad (15)$$

и

$$-\Delta u + q(P)u \quad (P \in \mathfrak{E}). \quad (16)$$

В дальнейшем используется следующий признак J -самосопряженности, соответствующий в случае вещественного потенциала теореме 34.

Теорема 46. Если в (15) или (16) вещественная часть потенциала ограничена снизу, то соответствующий минимальный оператор L является J -самосопряженным.

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем вещественную часть потенциала положительной.

В одномерном случае для доказательства теоремы достаточно установить, что для любой пары функций u и z из $\mathfrak{D}_{L^*}$

будет

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \{y'z - yz'\} = 0.$$

Для любой функции $y \in \mathfrak{D}_{L^*}$ имеем

$$\int_0^N (-y'' + \bar{q}y) \bar{y} dx = -y' \bar{y} \Big|_0^N + \int_0^N |y'|^2 dx + \int_0^N \bar{q} |y|^2 dx$$

или, переходя к вещественным частям,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^N (-y'' + \bar{q}y) \bar{y} dx = & -\operatorname{Re} \{y'(N) \overline{y(N)}\} + \\ & + \operatorname{Re} \{y'(0) \overline{y(0)}\} + \int_0^N |y'|^2 dx + \int_0^N |y|^2 \operatorname{Re} q(x) dx, \end{aligned}$$

откуда следует сходимость к конечному пределу при $N \rightarrow \infty$ величины

$$-\operatorname{Re} \{y'(N) \overline{y(N)}\} + \int_0^N |y'|^2 dx + \int_0^N |y|^2 \operatorname{Re} q(x) dx. \quad (17)$$

С другой стороны, поскольку

$$\int_0^\infty |y|^2 dx < \infty,$$

то положительная функция $|y|^2 = y\bar{y}$ не может монотонно возрастать, и, таким образом, для некоторой последовательности точек $N_k \rightarrow \infty$ будет $[y\bar{y}' + y'\bar{y}]_{x=N_k} \leq 0$, то есть

$$\operatorname{Re} \{y'(N_k) \overline{y(N_k)}\} \leq 0. \quad (18)$$

Теперь из неотрицательности функции $\operatorname{Re} q(x)$, неравенства (18) и сходимости величины (17) при $N = N_k \rightarrow \infty$ следует сходимость интегралов

$$\int_0^\infty |y'|^2 dx, \quad \int_0^\infty |y|^2 \operatorname{Re} q(x) dx.$$

Из полученного соотношения $y' \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$ следует, что для любой пары функций y и z из $\mathfrak{D}_{L^*}$ произведения $y'z$ и yz' принадлежат $\mathcal{L}_1(0, \infty)$ и, следовательно,

$$(yz' - y'z) \in \mathcal{L}_1(0, \infty). \quad (19)$$

С другой стороны, из равенства

$$\int_0^N (-y'' + \bar{q}y) z dx = [-y'z + yz']_0^N + \int_0^N (-z'' + \bar{q}z) y dx$$

следует существование предела

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \{yz' - y'z\},$$

который в силу (19) должен быть равен нулю. Таким образом, в одномерном случае теорема доказана.

В многомерном случае доказательство аналогично приведенному в $n^\circ 16$ доказательству леммы 9 и теоремы 34. При этом вместо равенства (17) $n^\circ 16$ следует использовать равенство

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_{|OP|=R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial R} ds = \\ = \int_{|OP|<R} |\nabla u|^2 d\omega + \int_{|OP|<R} \operatorname{Re} \{\bar{u} \Delta u\} d\omega, \end{aligned} \quad (20)$$

вытекающее из формулы Грина

$$\int_{|OP|=R} \bar{u} \frac{\partial u}{\partial R} ds = \int_{|OP|<R} |\nabla u|^2 d\Delta + \int_{|OP|<R} \bar{u} \Delta u d\omega.$$

При этом равенство (20) $n^\circ 16$ сохранит свой вид, если положить левую часть (20) равной $F(R)$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 9 $n^\circ 16$, получим, что вместе с u и $l[u]$ пространству $\mathcal{L}_2(\mathcal{E})$ будет принадлежать и $|\nabla u|$. Так как, далее, для комплекснозначных функций от вещественных переменных остается справедливым неравенство $\left| \frac{\partial u}{\partial R} \right| \leq |\nabla u|$, то, повторяя без изменений ранее приведенное доказательство теоремы 34 $n^\circ 16$, установим равенство $JLJ = L^*$, и теорема 46 доказана.

Что касается применения метода расщепления, то в одномерном случае никаких осложнений не возникает, так как дефектное число m будет конечным (оно удовлетворяет тем же неравенствам, что и в симметрическом случае [31 (8)]). Для многомерной операции (16) следует заново обосновать принцип расщепления, установленный в $n^\circ 17$ для случая вещественного потенциала.

Анализ доказательства леммы 10 $n^\circ 17$, из которой был выведен принцип расщепления, показывает, что веществен-

ность потенциала, по существу, была использована лишь в начале доказательства леммы, когда утверждалось, что нормированную характеристическую последовательность функций $\{f_n\}$, соответствующую значению $\lambda \in C(\tilde{L})$, можно считать ортогональной. При этом ортогональность этой последовательности использовалась лишь один раз, когда утверждалось, что ограниченная последовательность

$$\{f_{2n} - f_{2n-1}\}$$

будет некомпактной в $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

В случае комплексного потенциала нормированную характеристическую последовательность, соответствующую числу $\lambda \in C(\tilde{L})$, уже нельзя считать ортонормированной. Однако на основании леммы 2 п° 5 из некомпактной нормированной в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ последовательности $\{f_n\}$ можно выделить такую подпоследовательность $\{f_{n_k}\}$, чтобы последовательность разностей $\{f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\}$ также была некомпактна. Это обстоятельство восстанавливает справедливость принципа расщепления для операции (16) с комплекснозначным потенциалом.

ГЛАВА II

СПЕКТР ОДНОМЕРНЫХ ДВУЧЛЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

25. Двучленные дифференциальные операции. Так здесь и далее называются операции вида

$$(-1)^n y^{(2n)} + q(x) y, \quad (1)$$

где функция $q(x)$ предполагается вещественной и абсолютно интегрируемой в любом конечном интервале.

Оператор, порождаемый двучленной операцией (1), является не только самым простым, но и наиболее важным объектом применения прямых методов качественного спектрального анализа, так как при $n = 1$ он совпадает с одномерным оператором Шредингера. В силу этой связи операции (1) с дифференциальным уравнением Шредингера функцию $q(x)$ часто называют *потенциалом*.

Часть приводимых ниже теорем является прямым обобщением известных результатов относительно спектра для случая операции второго порядка

$$-y'' + q(x) y,$$

полученных в разное время аналитическими методами. Но в ряде случаев общие предложения настоящей главы оказываются новыми по отношению к результатам, полученным аналитическим путем, даже для частного случая $n = 1$.

Следует отметить, что пока нет данных о поведении потенциала $q(x)$, уже в простейшем случае $n = 1$ нельзя высказать каких-либо предположений о характере спектра оператора $\tilde{L}$ при конечных λ . И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан установили [28], что для любого конечного интервала λ -оси и произвольного замкнутого множества точек этого интервала существует такой потенциал $q(x)$ и такие краевые

условия, что спектр соответствующего оператора $\tilde{L}$ в этом интервале совпадает с заданным множеством. Это утверждение вытекает из полученных ими достаточных условий разрешимости обратной задачи спектрального анализа для операции (1) при $n = 1$. Пользуясь случаем, заметим, что обратные задачи качественного спектрального анализа, когда по данным свойствам спектра требуется установить характер поведения потенциала, почти не рассматривались. Относящиеся сюда предложения этой главы о необходимых условиях того или иного расположения частей спектра всегда связаны с дополнительным предположением о полуограниченности коэффициента $q(x)$ снизу.

Условимся в дальнейшем некоторое свойство спектра $S(\tilde{L})$, не зависящее от выбора расширения $\tilde{L}$ оператора L , называть *h -устойчивым*, если оно сохраняется при замене потенциала $q(x)$ потенциалом $\frac{1}{h} q(x)$, каково бы ни было положительное число h . Указанная замена потенциала, очевидно, равносильна переходу от операции (1) к операции

$$(-1)^n h y^{(2n)} + q(x) y. \quad (2)$$

Для некоторых свойств спектра существенно лишь поведение отрицательной части потенциала. В этих случаях она обозначается через $q^*(x)$, так что

$$q^*(x) = \begin{cases} q(x) & \text{при } q(x) < 0, \\ 0 & \text{при } q(x) \geq 0. \end{cases}$$

26. Некоторые вспомогательные неравенства. Приведем с доказательствами несколько элементарных неравенств, используемых в этой и следующей главах. При этом, как и ранее, через $\dot{C}_n(\alpha, \beta)$ обозначается класс функций, n -кратно непрерывно дифференцируемых и равных нулю в окрестности концов интервала (α, β) .

1. Для любой вещественной функции $y(x) \in \dot{C}_n(-\infty, \infty)$ при любом $m \leq n$

$$\|y^{(m)}\| \leq \|y\|^{\frac{n-m}{n}} \|y^{(n)}\|^{\frac{m}{n}}. \quad (3)$$

Это неравенство сохраняется для любых функций из $C_{n-1}(0, \infty)$ (не обязательно финитных), принадлежащих вместе со своей производной n -го порядка пространству $\mathcal{L}_2(0, \infty)$

и удовлетворяющих условию

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n)}(0) = 0. \quad (4)$$

Если опустить условие (4), то в случае полуоси (3) следует заменить неравенством

$$\|y^{(m)}\| \leq C_{mn} \|y\|^{\frac{n-m}{n}} \|y^{(n)}\|^{\frac{m}{n}}. \quad (5)$$

2. Для любой вещественной функции $y(x) \in \dot{C}_n(-\infty, \infty)$ существует не зависящая от $y(x)$ постоянная C_n такая, что

$$\|y'\|^2 \leq C_n (\|y^{(n)}\|^2 + \|y\|^2). \quad (6)$$

3. Если вещественная функция $y(x) \in \dot{C}_n(-\infty, \infty)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} y^2(x) dx \leq 1$$

и $M = \max_{-\infty < x < \infty} |y(x)|$, то

$$\|y^{(n)}\| > \frac{M^{2n}}{2^n}. \quad (7)$$

4. Для любой вещественной функции $y(x) \in \dot{C}_n(0, \infty)$

$$\int_0^{\infty} \frac{y^2}{x^{2n}} dx \leq \frac{2^{2n}}{[(2n-1)!!]^2} \int_0^{\infty} |y^{(n)}|^2 dx. \quad (8)$$

5. Для любой вещественной функции $y(x) \in \dot{C}_1[0, \infty]$ при любом $\alpha > -1$

$$\int_0^x x^\alpha y^2 dx \leq \frac{4}{(\alpha+1)^2} \int_0^{\infty} x^{\alpha+2} y'^2 dx. \quad (9)$$

Для доказательства неравенства (3) отправляемся от очевидного соотношения

$$\begin{aligned} \|y^{(m)}\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |y^{(m)}|^2 dx = \left| \int_{-\infty}^{\infty} y^{(m-1)} y^{(m+1)} dx \right| \leq \\ &\leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |y^{(m+1)}|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |y^{(m-1)}|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Повторяя такой же прием оценки к интегралам в правой части этого неравенства и т. д., получим неравенство (3).

Для доказательства неравенства (6) будем исходить из соотношения

$$\int_{-\infty}^{\infty} y'^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (y''^2 + y^2) dx,$$

эквивалентного неравенству

$$\int_{-\infty}^{\infty} (y'' + y)^2 dx \geq 0.$$

Это соотношение совпадает с подлежащим доказательству неравенством (6) при $n = 2$, а для перехода к любому n достаточно дополнительно воспользоваться неравенствами, вытекающими из него при замене y на y' , y'' , ..., $y^{(n-1)}$.

Неравенство (7) следует из (3) и соотношения

$$\begin{aligned} \frac{M^2}{2} &= \frac{1}{2} \left| \int_{\alpha}^{\infty} (y^2)' dx \right| = \left| \int_{\alpha}^{\infty} y y' dx \right| \leq \\ &\leq \left\{ \int_{\alpha}^{\infty} y^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \left\{ \int_{\alpha}^{\infty} y'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} y'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \|y'\|, \end{aligned}$$

где число α определено условием $|y(\alpha)| = M$.

Для доказательства неравенства (8) представим интеграл, стоящий в левой части этого неравенства, в виде

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} x^{-2n} y^2 dx &= 2 \int_0^{\infty} x^{-2n} dx \int_0^x y(t) y'(t) dt = \\ &= 2 \int_0^{\infty} y(t) y'(t) dt \int_t^{\infty} x^{-2n} dx = \frac{2}{2n-1} \int_0^{\infty} t^{1-2n} y(t) y'(t) dt. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью неравенства Коши — Буняковского получаем

$$\int_0^{\infty} x^{-2n} y^2 dx \leq \frac{2}{2n-1} \left\{ \int_0^{\infty} x^{-2n} y^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} x^{2-2n} y'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

откуда вытекает неравенство

$$\int_0^{\infty} \frac{y^2}{x^{2n}} dx \leq \frac{2^2}{(2n-1)^2} \int_0^{\infty} \frac{y'^2}{x^{2n-2}} dx.$$

Повторяя теперь такой же прием оценки к интегралу в правой части последнего неравенства и т. д., получим неравенство (8).

Наконец, для доказательства неравенства (9) воспользуемся представлением

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} y^2 dx = -2 \int_0^{\infty} y(t) y'(t) dt \int_0^t x^{\alpha} dx,$$

из которого с помощью неравенства Коши — Буняковского получаем соотношение

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} y^2 dx \leq \frac{2}{\alpha+1} \left\{ \int_0^{\infty} x^{\alpha} y^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_0^{\infty} x^{\alpha+2} y'^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}},$$

эквивалентное неравенству (9).

В связи с неравенствами этого пункта см. [100]. Кстати, отметим, что неравенство (5) является весьма частным случаем общих неравенств Ю. И. Любича для степеней линейного оператора в линейных нормированных пространствах [64 (2)].

27. Признаки ограниченности и дискретности отрицательной части спектра. Простейший признак такого рода дает

Теорема 1 [31 (3)]. *Если*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q^*(x) = 0,$$

то на отрицательной λ -полуоси спектр оператора $\tilde{L}$ исчерпывается ограниченным снизу множеством собственных значений с единственной возможной предельной точкой $\lambda = 0$.

Доказательство. Выберем точку расщепления $\gamma = \gamma_{\epsilon}$ ($\epsilon > 0$) так, чтобы при $x > \gamma$ было $q(x) > -\epsilon$. Если соответствующее расщепление оператора $\tilde{L}$ определено соотношениями

$$\tilde{L} = \tilde{L}_0, \quad L_0 = L_1 \oplus L_{\gamma}, \quad (10)$$

то, согласно принципу расщепления, будет $C(\tilde{L}) = C(L_{\gamma})$.

Так как, далее, при любом $y \in \mathfrak{D}_{L_\gamma}$ имеет место неравенство

$$(L_\gamma y, y) = \int_{\gamma}^{\infty} |y^{(n)}|^2 dx + \int_{\gamma}^{\infty} q(x) |y|^2 dx > -\varepsilon \|y\|^2,$$

то оператор L_γ ограничен снизу числом $-\varepsilon$, так что $C(\tilde{L}_\gamma) \cap (-\infty, -\varepsilon) = \emptyset$ и, следовательно, также имеем $C(\tilde{L}) \cap (-\infty, -\varepsilon) = \emptyset$. Отсюда, в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, следует, что

$$C(\tilde{L}) \cap (-\infty, 0) = \emptyset.$$

Так как, наконец, из ограниченности снизу оператора L_γ следует ограниченность снизу оператора $\tilde{L}$, то теорема доказана.

Теорема 2 [31 (9)]. Если при любом $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\int_{M_\delta} |q^*(x)| dx < \infty, \quad (11)$$

где M_δ есть множество значений x , для которых $|q^*(x)| \geq \delta$, то отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ дискретна и ограничена.

Доказательство. В силу теоремы 28 п° 10, достаточно установить, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N_\varepsilon$ такое, что квадратичный функционал

$$\Phi[y] = \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx + \int_N^\infty q^*(x) |y|^2 dx + \varepsilon \int_N^\infty |y|^2 dx \quad (12)$$

неотрицателен для любой N -финитной функции $y \in \mathfrak{D}_L$.

При заданном положительном ε разобьем полуось $J = [0, \infty)$, на два непересекающихся множества

$$J = \mathfrak{M} + \mathfrak{N},$$

определяемых условиями

$$|q(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } x \in \mathfrak{M},$$

$$|q(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } x \in \mathfrak{N}.$$

Далее, положим

$$J_N = [N, \infty), \quad \mathfrak{M}_N = J_N \cap \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}_N = J_N \cap \mathfrak{N}$$

и выберем число $N = N_\varepsilon$ так, чтобы было

$$\int_{\mathfrak{N}_N} |q^*(x)| dx < \min \left\{ \frac{1}{2}, \frac{\varepsilon^{4n-2}}{4^n} \right\}. \quad (13)$$

Так как функционал (12) однороден, то можно считать

$$\int_N^\infty |y|^2 dx = 1. \quad (14)$$

Имеем, очевидно,

$$\int_{\mathfrak{M}_N} q^*(x) |y|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathfrak{M}_N} |y|^2 dx \geq 0,$$

так что

$$\Phi_\varepsilon[y] \geq \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx + \int_{\mathfrak{N}_N} q^*(x) |y|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2} \int_N^\infty |y|^2 dx.$$

Обозначим через M максимальное значение финитной функции $|y(x)|$ на замкнутом множестве $\mathfrak{N}_N$. Если $M < \varepsilon$, то, пользуясь нормировкой (14) и условием (13), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon[y] &\geq \int_{\mathfrak{N}_N} q^*(x) |y|^2 dx + \\ &+ \frac{\varepsilon}{2} \int_N^\infty |y|^2 dx \geq \varepsilon \left\{ \frac{1}{2} - \int_{\mathfrak{N}_N} |q^*(x)| dx \right\}. \end{aligned}$$

Если же $M \geq \varepsilon$, то из неравенства (7) и условия (13) следует

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon[y] &\geq \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx - \int_{\mathfrak{N}_N} |q^*(x)| |y|^2 dx \geq \\ &\geq M^2 \left\{ \frac{1}{4^n} M^{4n-2} - \int_{\mathfrak{N}_N} |q^*(x)| dx \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в обоих случаях $\Phi_\varepsilon[y] > 0$, что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 следует предыдущая теорема и, в частности, два простых признака дискретности и ограниченности отрицательной части спектра оператора $\tilde{L}$, выражаемых соотношением

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0$$

или

$$\int_0^{\infty} |q(x)| dx < \infty.$$

При $n = 1$ первый из этих признаков по существу был установлен еще Г. Вейлем с помощью осцилляционных теорем (см. [20 (2)]). Второй признак при $n = 1$ также впервые установлен Г. Вейлем [20 (2)] с помощью асимптотических формул (см. также [61 (1)]).

Следствие. Если при некотором значении $r \geq 1$

$$\int_0^{\infty} |q^*(x)|^r dx < \infty,$$

то отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ дискретна и ограничена снизу.

Действительно, при $x \in M_\delta$ имеем

$$\frac{1}{\delta} |q^*(x)| \geq 1$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\delta} |q^*(x)| \leq \frac{1}{\delta^r} |q^*(x)|^r,$$

так что

$$\int_{M_\delta} |q^*(x)| dx \leq \frac{1}{\delta^{r-1}} \int_{M_\delta} |q^*(x)|^r dx < \infty,$$

и условие (11) выполнено.

При $r = 1$ доказанное следствие с заменой $q^*(x)$ на $q(x)$ впервые установлено асимптотическими методами И. М. Раппопортом в [82 (1)].

Следующий результат, принадлежащий М. Ш. Бирману, показывает, что в теореме 1 требование стремления отрицательной части потенциала к нулю можно заменить условием сходимости к нулю ее среднего значения.

Теорема 3 [13(5)]. Если при некотором (ω значит, и при любом) $\omega \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+\omega} q^*(t) dt = 0, \quad (15)$$

то отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ ограничена снизу и дискретна.

Доказательство. Достаточно установить неотрицательность функционала (12), то есть неравенство

$$\int_N^\infty |q^*(x)| \cdot |y|^2 dx < \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx + \varepsilon \int_N^\infty |y|^2 dx \quad (16)$$

при любом $\varepsilon > 0$ для всех N -финитных функций $y \in \mathfrak{D}_L$.

Пусть $\eta > 0$ и число $N = N_\eta$ выбрано так, что при $x > N$ выполнено неравенство

$$\int_x^{x+\omega} |q^*(t)| dt < \eta,$$

и пусть $y(x)$ — любая вещественная N -финитная функция из $\mathfrak{D}_L$.

Разобьем полуось $x > N$ на отрезки Ω_k длины ω и на каждом таком отрезке, пользуясь теоремой о среднем значении, определим точку x_k условием

$$y^2(x_k) = \frac{1}{\omega} \int_{\Omega_k} y^2(t) dt.$$

При таком выборе точек x_k и в силу имеющей место на Ω_k оценки

$$|y^2(x) - y^2(x_k)| = 2 \left| \int_{x_k}^x y' y dt \right| \leq \int_{\Omega_k} (y'^2 + y^2) dt,$$

получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} |q^*(x)| y^2 dx &= \int_{\Omega_k} |q^*(x)| [y^2(x) - y^2(x_k)] dx + \\ &+ \int_{\Omega_k} |q^*(x)| y^2(x_k) dx < \eta \int_{\Omega_k} (y'^2 + y^2) dt + \frac{\eta}{\omega} \int_{\Omega_k} y^2 dt \end{aligned}$$

или, считая $\omega > 1$,

$$\int_{\Omega_k} |q^*(x)| y^2 dx < 2\eta \int_{\Omega_k} (y'^2 + y^2) dx.$$

Суммируя обе части полученного неравенства по k , получаем

$$\int_N^\infty |q^*(x)| y^2 dx < 2\eta \int_N^\infty (y'^2 + y^2) dx. \quad (17)$$

Теперь из (17) и неравенства (6) предыдущего пункта следует соотношение

$$\int_N^\infty |q^*(x)| y^2 dx < 2\eta(1 + C_n) \int_N^\infty (y^{(n)^2} + y^2) dx, \quad (18)$$

откуда при $2\eta(1 + C_n) < \varepsilon < 1$ вытекает требуемое неравенство (16), и теорема доказана.

Из установленного выше неравенства (18) следует несколько больше, чем указано в формулировке теоремы, а именно — ограниченность снизу и дискретность отрицательной части спектра оператора $\tilde{L}_h$, порождаемого операцией (2) при любом $h > 0$, то есть h -устойчивая дискретность и ограниченность снизу спектра оператора $\tilde{L}$.

Как отметил М. Ш. Бирман, в случае отрицательного потенциала условие (15) не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ была h -устойчиво ограничена и дискретна.

Таким образом, имеет место

Теорема 4 [13 (5)]. *Для того чтобы отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ была h -устойчиво ограничена снизу и дискретна, достаточно, а в случае $q(x) \leq 0$ и необходимо, чтобы выполнялось условие (15).*

Доказательство достаточности дано выше. Для доказательства необходимости предположим, что условие (15) не выполнено, то есть для некоторой бесконечной последовательности точек $x_k \rightarrow \infty$ при некотором $\omega > 0$

$$\int_{x_k}^{x_k + \omega} |q(x)| dx > \rho > 0.$$

Построим функцию $\varphi \in \mathfrak{D}_L$, удовлетворяющую условиям

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq \omega), \\ 0 & (x \leq -\delta, x \geq \omega + \delta), \end{cases}$$

и с ее помощью — систему финитных функций

$$\varphi_k(x) = \varphi(x - x_k) \quad (19)$$

с непересекающимися носителями $[x_k - \delta, x_k + \omega + \delta]$.

Для этой системы функций интеграл

$$\int_0^\infty (\varphi_k^{(n)^2} + \varphi_k^2) dx = C$$

не зависит от k , в то время как

$$\int_0^\infty |q(x)| \cdot |\varphi_k|^2 dx > \int_{x_k}^{x_k + \omega} |q(x)| dx > \rho > 0.$$

Таким образом, при любом N существует N -финитная функция $\varphi_k(x)$ ($k = k_N$), для которой

$$\int_0^\infty |q(x)| |y|^2 dx > \frac{\rho}{C} \int_0^\infty (y^{(n)^2} + y^2) dx, \quad (20)$$

откуда, в силу теоремы 28 п° 10, при $h \leq \frac{\rho}{C}$ следует, что $C(\tilde{L}_h) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$. Теорема доказана.

28. Признаки полуограниченности и дискретности всего спектра. Простейший признак такого рода дает

Теорема 5 [31 (1)]. *Если*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} q(x) = +\infty, \quad (21)$$

то спектр оператора $\tilde{L}$ ограничен снизу и дискретен.

Доказательство. Ограниченность снизу спектра $S(\tilde{L})$ следует из теоремы 1 предыдущего пункта. Для доказательства дискретности $S(\tilde{L})$ выберем точку расщепления $\gamma = \gamma_N$ так, чтобы при $x > \gamma$ было $q(x) > N$. Если соответствующее расщепление оператора $\tilde{L}$ определено соотношениями (10), то, согласно принципу расщепления, будет $C(\tilde{L}) = C(L_\gamma)$.

Так как, далее, при любом $y \in \mathfrak{D}_{L_\gamma}$ имеет место неравенство

$$(L_\gamma y, y) = \int_{\gamma}^{\infty} |y^{(n)}|^2 dx + \int_{\gamma}^{\infty} q(x) |y|^2 dx > N \|y\|^2,$$

то оператор L_γ ограничен снизу числом N , так что имеем $C(L_\gamma) \cap (-\infty, N) = \emptyset$ и, следовательно, также $C(\tilde{L}) \cap (-\infty, N) = \emptyset$. Отсюда, в силу произвольности числа N , следует, что $C(\tilde{L}) = \emptyset$, и теорема доказана.

При $n = 1$ теорема 5 совпадает с признаком, установленным впервые Г. Вейлем [20 (2)] с помощью теорем сравнения Штурма в предположении монотонности потенциала и обобщенным позднее на немонотонные потенциалы Е. Титчмаршем [95 (2)].

Как показал А. М. Молчанов в [70], условие (21) стремления потенциала к бесконечности можно заменить условием стремления к бесконечности его среднего значения, если только предполагать потенциал ограниченным снизу. Условие А. М. Молчанова оказывается не только достаточным, но и необходимым для дискретности спектра в классе ограниченных снизу потенциалов. Отметим в связи с этим, что, как это следует из теоремы 2, условие ограниченности снизу потенциала $q(x)$ не является необходимым для полуограниченности снизу спектра оператора $\tilde{L}$.

Ниже с помощью метода расщепления теорема А. М. Молчанова устанавливается для двучленной операции (1) любого порядка.

Теорема 6 [70]. *Если потенциал $q(x)$ ограничен снизу, то для дискретности спектра оператора $\tilde{L}$ необходимо и достаточно выполнение при любом $\omega > 0$ предельного соотношения*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+\omega} q(t) dt = +\infty. \quad (22)$$

Доказательство. Не ограничивая общности, можно считать

$$q(x) \geq 1 \quad (x \geq 0). \quad (23)$$

Пусть имеет место соотношение (22). Для доказательства дискретности спектра оператора $\tilde{L}$ достаточно установить

дискретность отрицательной части спектра оператора $\tilde{L} - \mu I$ при любом $\mu > 0$, что, согласно теореме 28 п° 10, сводится к проверке неравенства

$$\mu \int_N^\infty y^2 dx < \int_N^\infty (|y^{(n)}|^2 + q|y|^2) dx \quad (24)$$

на всех N -финитных функциях $y \in \mathfrak{D}_L$ при некотором N .

Пусть для данного ω число $N = N_\omega$ выбрано так, чтобы при $x > N$ имело место неравенство

$$\int_x^{x+\omega} q(t) dt > 1, \quad (25)$$

и пусть $y(x)$ — любая N -финитная функция из $\mathfrak{D}_L$.

Как и при доказательстве теоремы 3, разобьем полуось $x > N$ на отрезки Ω_k длины ω и на каждом таком отрезке определим точку x_k условием

$$y^2(x_k) = \frac{\int_{\Omega_k} q(x) y^2(x) dx}{\int_{\Omega_k} q(x) dx}. \quad (26)$$

В силу неравенства (23) будет при $x \in \Omega_k$

$$\begin{aligned} |y^2(x) - y^2(x_k)| &= 2 \left| \int_{x_k}^x y y' dt \right| \leq \\ &\leq \int_{\Omega_k} (y'^2 + y^2) dt \leq \int_{\Omega_k} (y'^2 + q y^2) dt, \end{aligned}$$

откуда, при указанном выше способе (26) выбора точек x_k , получаем неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_k} y^2 dx &= \int_{\Omega_k} y^2(x_k) dx + \int_{\Omega_k} [y^2(x) - y^2(x_k)] dx \leq \\ &\leq \omega \frac{\int_{\Omega_k} q(x) y^2(x) dx}{\int_{\Omega_k} q(x) dx} + \omega \int_{\Omega_k} (y'^2 + q y^2) dx. \end{aligned}$$

или, в силу (25),

$$\int_{\Omega_k} y^2 dx \leq \omega \int_{\Omega_k} q y^2 dx + \omega \int_{\Omega_k} (y'^2 + q y^2) dx.$$

Суммируя обе части последнего неравенства по k , получаем

$$\begin{aligned} \int_N^\infty y^2 dx &\leq \omega \int_N^\infty q y^2 dx + \\ &+ \omega \int_N^\infty (y'^2 + q y^2) dx < 2\omega \int_N^\infty (y'^2 + q y^2) dx. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27), (23) и (6) следует, наконец, соотношение

$$\int_N^\infty y^2 dx < 2\omega (C_n + 1) \int_N^\infty (y^{(n)^2} + q y^2) dx,$$

откуда при $\omega < \frac{1}{2\mu(C_n + 1)}$ вытекает требуемое неравенство (24).

Переходя теперь к доказательству необходимости условия (22), предположим, что спектр $S(\tilde{L})$ дискретен, но для некоторой последовательности точек $x_k \rightarrow \infty$ при некотором $\omega > 0$

$$\int_{x_k}^{x_k + \omega} q(t) dt < \rho \quad (\rho < \infty).$$

Построим, как при доказательстве теоремы 4, вещественную функцию $\varphi \in \mathfrak{D}_L$, удовлетворяющую условиям

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 & (\delta \leq x \leq \omega - \delta), \\ 0 & (x \leq 0, x \geq \omega), \end{cases} \quad |\varphi(x)| \leq 1,$$

и с ее помощью — систему финитных функций

$$\varphi_k(x) = \varphi(x - x_k)$$

с непересекающимися носителями $[x_k - \delta, x_k + \omega + \delta]$. Для этой системы функций будет

$$\int_0^\infty (\varphi_k^{(n)^2} + q \varphi_k^2) dx < C + \int_{x_k}^{x_k + \omega} q(x) dx < C + \rho,$$

в то время как

$$\int_0^{\infty} \varphi_k^2 dx > \omega - 2\delta.$$

Таким образом, при любом N существует N -финитная функция $\varphi_k \in \mathfrak{D}_L$ ($k = k_N$), для которой

$$\int_N^{\infty} y^2 dx > \frac{\omega - 2\delta}{C + \rho} \int_N^{\infty} (y^{(n)^2} + qy^2) dx,$$

откуда, в силу теоремы 28 п° 10, при $\mu > \frac{C + \rho}{\omega - 2\delta}$ следует, что $C(\tilde{L} - \mu I) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$.

Теорема доказана полностью.

В условиях теоремы 5 собственные значения оператора L возрастают тем быстрее, чем быстрее растет потенциал $q(x)$. При $n = 1$, $q(x) \rightarrow \infty$, $q'(x) > 0$ и $q''(x) > 0$ де Вет и Мандль [21] получили для числа $N(\lambda)$ собственных значений, меньших λ , асимптотическую формулу. В. А. Ткаченко обратил внимание автора на то, что их доказательство без изменений переносится на операцию (1) любого порядка и приводит при $\lambda \rightarrow \infty$ к асимптотической формуле

$$N(\lambda) \sim \frac{1}{\pi} \int_{q(x) \leq \lambda}^{2n} \sqrt{\lambda - q(x)} dx.$$

Для вывода этой формулы промежуток $(0, a)$, где $q(a) = \lambda$, разбивается точками $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = a$ на частичные интервалы, в каждом из которых потенциал $q(x)$ заменяется один раз на $q(x_k)$, а другой раз на $q(x_{k-1})$. При этом на концах частичных интервалов задаются условия $y^{(r)}(x_k) = 0$, соответственно $y^{(n+r)}(x_k) = 0$ ($k = 0, 1, \dots, m$; $r = 0, 1, \dots, n-1$). Применение вариационного принципа Куранта приводит к двусторонней оценке

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) \sqrt[2n]{\lambda - q(x_k)} - m &\leq N(\lambda) \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^m (x_k - x_{k-1}) \sqrt[2n]{\lambda - q(x_{k-1})} + m. \end{aligned}$$

Если, далее, выбрать разбиение на частичные интервалы так, чтобы в каждом из них колебание функции $\sqrt[2n]{\lambda - q(x)}$

равнялось $\frac{1}{m} \sqrt[2n]{\lambda - q(0)}$, то будет иметь место оценка

$$\left| N(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{q(x) \leq \lambda} \sqrt[2n]{\lambda - q(x)} dx \right| \leq \frac{a \sqrt[2n]{\lambda - q(0)}}{\pi m} + m.$$

Минимизация правой части этой оценки по m влечет неравенство

$$\left| N(\lambda) - \frac{1}{\pi} \int_{q(x) \leq \lambda} \sqrt[2n]{\lambda - q(x)} dx \right| \leq 2 \sqrt[2n]{\frac{a}{\pi} \sqrt[2n]{\lambda - q(0)}},$$

откуда с помощью условия $q''(x) > 0$ получается указанная выше асимптотическая формула для $N(\lambda)$.

Заметим, что условие $q''(x) > 0$ исключает из области действия асимптотического закона некоторую «пограничную» зону потенциалов, которые еще удовлетворяют признаку дискретности (21), но растут медленнее, чем x . Существование подобных зон, в которых асимптотическое распределение собственных значений неизвестно, характерно для сингулярных задач.

29. Критерий дискретности спектра для случая полярной дифференциальной операции. Задача о нахождении собственных частот свободных колебаний полубесконечной струны плотности $\rho = \rho(x)$ приводится к дифференциальному уравнению

$$-y'' - \lambda \rho(x) y = 0 \quad (x \geq 0).$$

Рассмотрим более общее уравнение

$$(-1)^n y^{(2n)} - \lambda \rho(x) y = 0 \quad (x \geq 0), \quad (28)$$

где $\rho(x)$ — произвольная измеримая положительная функция. К уравнению (28) приводит задача нахождения собственных значений оператора $\tilde{L}$, порождаемого в пространстве $\mathcal{L}_\rho^2(0, \infty)$ операцией

$$(-1)^n \frac{1}{\rho(x)} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}, \quad (29)$$

в дальнейшем называемой *полярной*. Очевидно, построение оператора $\tilde{L}$, а равным образом другие процедуры и предложения § 2 главы I легко переносятся на случай полярной операции (29). В частности (см. примечание к теореме 28 п° 10),

для дискретности спектра $S(\tilde{L})$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\mu > 0$ существовало число $N = N_\mu$ такое, чтобы на всех N -финитных функциях $y \in \mathfrak{D}_L$ имело место неравенство

$$\int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx - \mu \int_N^\infty \rho(x) |y|^2 dx > 0. \quad (30)$$

Полученное методом расщепления условие (30) позволяет также найти критерий дискретности спектра, установленный иным путем при $n = 1$ И. С. Кацом и М. Г. Крейном в [50]. Из этого критерия следует, в частности, что спектр частот полубесконечной струны может быть дискретным лишь тогда, когда масса этой струны конечна. Приводимая ниже формулировка и доказательство критерия дискретности принадлежат М. Ш. Бирману.

Теорема 7. Для того чтобы спектр оператора $\tilde{L}$, порождаемого полярной операцией (29,) был дискретным, необходимо и достаточно выполнение предельного соотношения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2n-1} \int_x^\infty \rho(t) dt = 0. \quad (31)$$

Доказательство. Пусть имеет место соотношение (31). Тогда для заданного $\varepsilon > 0$ существует число $N = N_\varepsilon$ такое, что при $x > N$ будет

$$x^{2n-1} \int_x^\infty \rho(t) dt < \varepsilon.$$

Поэтому для любой N -финитной функции $y \in \mathfrak{D}_L$ имеем

$$\begin{aligned} \int_N^\infty \rho y^2 dx &= 2 \int_N^\infty \rho dx \int_N^x y y' dt = 2 \int_N^\infty y y' dt \int_t^\infty \rho dx = \\ &= 2 \int_N^\infty \frac{y y'}{t^{2n-1}} \cdot t^{2n-1} dt \int_t^\infty \rho dx \leq 2\varepsilon \int_N^\infty \frac{|y y'|}{t^{2n-1}} dt, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\int_N^\infty \frac{|yy'|}{t^{2n-1}} dt \leq \left\{ \int_N^\infty \frac{y^2}{t^{2n}} dt \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ \int_N^\infty \frac{y'^2}{t^{2n-2}} dt \right\}^{\frac{1}{2}},$$

и, оценивая каждый множитель правой части последнего соотношения с помощью неравенства 4 п° 26, получаем

$$\int_N^\infty \frac{|yy'|}{t^{2n-1}} dt \leq \frac{2^n}{(2n-1)!!} \cdot \frac{2^{n-1}}{(2n-3)!!} \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dt. \quad (33)$$

Из (32) и (33) следует неравенство

$$\int_N^\infty \rho y^2 dx \leq \varepsilon C \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx,$$

где константа C зависит лишь от n . Выбирая теперь $\varepsilon < \frac{1}{C\mu}$, получаем из (33) неравенство (30), из которого, в силу произвольности числа $\mu > 0$, следует дискретность спектра $S(\tilde{L})$.

Переходя к доказательству необходимости условия (31), предположим, что для некоторой последовательности точек $x_k \rightarrow \infty$ будет

$$x_k^{2n-1} \int_{x_k}^\infty \rho(t) dt > \sigma > 0.$$

При этом для достаточно больших $\xi_k > x_k$ также будет

$$x_k^{2n-1} \int_{x_k}^{\xi_k} \rho(t) dt > \sigma > 0,$$

и, переходя в случае необходимости к подпоследовательности, можно считать $x_{k+1} > 2\xi_k$ при всех k .

Для построения надлежащей пробной системы финитных функций с непересекающимися носителями выберем сначала какую-нибудь $2n$ -кратно непрерывно дифференцируемую функцию $\psi(x)$, определенную на интервале $[0, 1]$ и удовлетворяющую на его концах условиям

$$\begin{aligned} \psi(0) = \psi'(0) = \dots = \psi^{(2n)}(0) = 0, \\ \psi(1) = 1, \quad \psi'(1) = \psi''(1) = \dots = \psi^{(2n-1)}(1) = 0 \end{aligned}$$

Далее положим

$$\chi_k(x) = \begin{cases} 0 & x < x_k - \frac{1}{3}(x_k - \xi_{k-1}) \\ \psi\left(1 + \frac{3(x - x_k)}{x_k - \xi_{k-1}}\right) & x_k - \frac{1}{3}(x_k - \xi_{k-1}) < x < x_k, \\ 1 & x_k < x < \xi_k, \\ \psi\left(1 - \frac{3(x - \xi_k)}{x_{k+1} - \xi_k}\right) & \xi_k < x < \xi_k + \frac{1}{3}(x_{k+1} - \xi_k), \\ 0 & x > \xi_k + \frac{1}{3}(x_{k+1} - \xi_k) \end{cases}$$

и, наконец, образуем систему финитных функций с непересекающимися носителями

$$\varphi_k(x) = \chi_k(x) x_k^{\frac{2n-1}{2}} \quad (k = 1, 2, \dots),$$

принадлежащую $\mathfrak{D}_L$. Для этой системы имеем

$$\int_0^\infty \rho \varphi_k^2(x) dx \geq \int_{x_k}^{\xi_k} \rho \varphi_k^2(x) dx = x_k^{2n-1} \int_{x_k}^{\xi_k} \rho dx > \sigma > 0. \quad (34)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |\varphi_k^{(n)}(x)|^2 dx &= x_k^{2n-1} \int_0^\infty |\chi_k^{(n)}(x)|^2 dx = \\ &= 3^{2n-1} x_k^{2n-1} \left\{ \int_0^1 (x_k - \xi_{k-1})^{1-2n} |\psi^{(n)}(t)|^2 dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 (x_{k+1} - \xi_k)^{1-2n} |\psi^{(n)}(t)|^2 dt \right\}, \end{aligned}$$

и так как

$$\frac{x_k}{x_k - \xi_{k-1}} = \frac{1}{1 - \frac{\xi_{k-1}}{x_k}} < 2,$$

$$\frac{x_k}{x_{k+1} - \xi_k} < \frac{x_k}{\xi_k} < 1,$$

то будет при всех k

$$\int_0^{\infty} |\varphi_k^{(n)}(x)|^2 dx < C_n, \quad (35)$$

где постоянная C_n от k не зависит.

Из (34) и (35) следует при любом k неравенство

$$\int_0^{\infty} \rho \varphi_k^2(x) dx > \frac{\sigma}{C_n} \int_0^{\infty} |\varphi_k^{(n)}(x)|^2 dx,$$

так что при любом N существует финитная функция $\varphi_k(x) \in \mathfrak{D}_L$ ($k = k_N$), для которой неравенство (30) при $\mu = \sigma C_n^{-1}$ не выполняется, что противоречит дискретности спектра оператора $\tilde{L}$. Теорема доказана.

Некоторые другие результаты о спектре сингулярной струны имеются в [49].

30. Признаки неосцилляторности и осцилляторности.

В силу результатов п° 12 признаки неосцилляторности или осцилляторности дифференциального уравнения

$$(-1)^n y^{(2n)} + q(x) y = 0 \quad (36)$$

являются одновременно признаками конечности или соответственно бесконечности множества точек отрицательной части спектра оператора $\tilde{L}$.

Приводимые ниже предложения формулируются как признаки неосцилляторности или осцилляторности. Следующий интегральный признак неосцилляторности непосредственно следует из неравенства (8) п° 26.

Теорема 8 [31 (11)]. *Если*

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} x^{2n-1} \int_x^{\infty} |q^*(t)| dt < \frac{\alpha_n^2}{2n-1}, \quad (37)$$

где

$$\alpha_n = \frac{(2n-1)!!}{2^n}, \quad (38)$$

то уравнение (36) неосцилляторно.

Доказательство. В силу (37) для любой N -финитной функции $y \in \mathfrak{D}_L$ имеем

$$\begin{aligned} \int_N^\infty |q^*(x)| y^2 dx &= 2 \int_N^\infty |q^*(x)| dx \int_N^x y y' dt = \\ &= 2 \int_N^\infty y y' dt \int_t^\infty |q^*(x)| dx \leq 2 \int_N^\infty \frac{|y y'|}{t^{2n-1}} t^{2n-1} \int_t^\infty |q^*(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{2\alpha_n^2}{2n-1} \int_N^\infty \frac{|y y'|}{t^{2n-1}} dt, \end{aligned}$$

откуда, на основании неравенства (33), получаем

$$\int_N^\infty |q^*(x)| y^2 dx \leq \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\int_N^\infty (|y^{(n)}|^2 + q y^2) dx \geq \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx - \int_N^\infty |q^*(x)| y^2 dx \geq 0,$$

откуда, в силу теоремы 28 п° 10, следует неосцилляторность уравнения (36).

Непосредственным обобщением классической теоремы Кнезера об осцилляторности решений дифференциального уравнения второго порядка является следующая

Теорема 9 [31 (9)]. Уравнение (36) неосцилляторно, если при достаточно больших x выполнено неравенство

$$q(x) \geq -\alpha_n^2 x^{-2n}, \quad (39)$$

и осцилляторно, если при некотором $\delta > 0$ для достаточно больших x выполнено неравенство

$$q(x) < -(\alpha_n^2 + \delta) x^{-2n}, \quad (40)$$

где «постоянная Кнезера» α_n^2 определяется равенством (38).

Доказательство. В силу результатов п° 12 достаточно установить, что «стандартное» уравнение

$$\Lambda[y] \equiv (-1)^n y^{(2n)} + \alpha x^{-2n} y = 0 \quad (41)$$

будет неосцилляторным при $\alpha \geq -\alpha_n^2$ и будет осцилляторным при $\alpha < -\alpha_n^2$.

Уравнение Эйлера (41) сводится к уравнению с постоянными коэффициентами, и можно непосредственно исследовать его решения.

Другой путь доказательства состоит в использовании предыдущей теоремы 8, из которой непосредственно следует неосцилляторность уравнения (41) при $\alpha \geq -\alpha_n^2$. Доказательство осцилляторности этого уравнения при $\alpha < -\alpha_n^2$ требует, как и в аналогичных теоремах $n^\circ n^\circ 27-29$, построения специальной системы пробных финитных функций или может быть получено в качестве непосредственного следствия дальнейшей теоремы 12.

Наконец, третье доказательство, подробно проводимое ниже, состоит в следующем.

С помощью замены переменных

$$y = x^{n-\frac{1}{2}} u, \quad x = \exp t \quad (42)$$

операцию

$$\mu[y] = (-1)^n \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}}$$

преобразуем к виду

$$x^{-(n+\frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{2n} \beta_k \frac{d^{2n-k} u}{dt^{2n-k}}, \quad (43)$$

где β_k — некоторые постоянные коэффициенты, причем $\beta_0 = (-1)^n$, $\beta_{2n} = \alpha_n$.

Отсюда для стандартной операции $\Lambda[y]$ при любой N -финитной функции $y \in \mathfrak{D}_L$ получаем равенство

$$(\Lambda[y], y) = \int_{N'}^{\infty} \left\{ (\alpha + \alpha_n^2) |u|^2 + \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^{n-r} \beta_{2r} \left| \frac{d^{n-r} u}{dt^{n-r}} \right|^2 \right\} dt,$$

правую часть которого можно представить в форме

$$\int_{N'}^{\infty} P\left[i \frac{d}{dt}\right] u \cdot \bar{u} dt,$$

где

$$P(\lambda) = (-1)^n \beta_0 \lambda^{2n} + (-1)^{n-1} \beta_2 \lambda^{2(n-2)} + \dots \\ \dots - \beta_{2n-2} \lambda^2 + (\alpha_n + \alpha). \quad (44)$$

Таким образом,

$$(\Lambda[y], y) = \left(P \left[i \frac{d}{dt} \right] u, u \right). \quad (45)$$

Так как, далее, непрерывная часть спектра оператора $P \left[i \frac{d}{dt} \right]$ совпадает с множеством значений многочлена $P(\lambda)$ при $-\infty < \lambda < \infty$, а дискретная часть спектра есть множество конечное, то, согласно (45), необходимым и достаточным условием неосцилляторности операции $\Lambda[y]$ является неотрицательность многочлена (44) на λ -оси. Как будет проверено ниже, все коэффициенты многочлена $P(\lambda)$, кроме, быть может, последнего, неотрицательны, то есть

$$(-1)^{n-r} \beta_{2r} \geq 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-1), \quad (46)$$

так что условие неотрицательности многочлена (44) сводится к неравенству

$$\alpha_n^2 + \alpha \geq 0. \quad (47)$$

Таким образом, при выполнении последнего неравенства (47) уравнение (41) будет неосцилляторным, а в противном случае — осцилляторным, что и требовалось доказать.

Теперь остается лишь установить неравенства (46). С этой целью отметим, что, согласно (43), число β_k является коэффициентом при $x^{-(n+\frac{1}{2})}$ в выражении $\mu \left[x^{n-\frac{1}{2}} \ln^k x \right]$, так что

$$\beta_k = (-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} \left\{ x^{n-\frac{1}{2}} \ln^k x \right\} \Big|_{x=1}$$

и, следовательно, знак β_k совпадает со знаком коэффициента при z^{2n} в разложении функции

$$f(z) = (-1)^n (1+z)^{n-\frac{1}{2}} \ln^k (1+z)$$

по степеням z .

Для разложения функции $f(z)$ в степенной ряд представим ее в виде

$$f(z) = \frac{d^k \zeta}{ds^k},$$

где

$$\zeta(s) = (-1)^n (1+z)^s.$$

Имеем

$$\zeta(s) = (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} \binom{s}{j} z^j,$$

откуда

$$f(z) = (-1)^n \sum_{j=0}^{\infty} z^j \frac{d^k}{ds^k} \binom{s}{j},$$

так что знак β_k совпадает со знаком

$$(-1)^n \frac{d^k}{ds^k} \binom{s}{j}$$

при $j = 2n$, $s = n - \frac{1}{2}$.

Полагая $\sigma = s - n + \frac{1}{2}$, получаем

$$(-1)^n \frac{d^k}{ds^k} \binom{s}{2n} \Big|_{s=n-\frac{1}{2}} = \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{d^k}{d\sigma^k} Q(\sigma) \Big|_{\sigma=0}, \quad (48)$$

где

$$Q(\sigma) = \left[\sigma^2 - \frac{(2n-1)^2}{4} \right] \left[\sigma^2 - \frac{(2n-3)^2}{4} \right] \dots \left[\sigma^2 - \frac{1}{4} \right], \quad (49)$$

и, следовательно, знак β_k совпадает со знаком коэффициента при σ^k в многочлене $(-1)^n Q(\sigma)$, то есть

$$(-1)^{n-r} \beta_{2r} \geq 0, \quad \beta_{2r+1} = 0 \quad (r = 0, 1, \dots, n-1),$$

что и требовалось установить.

Наряду с теоремой 8 некоторый интегральный признак неосцилляторности дает также следующая

Теорема 10 [31 (9)]. Если при некотором $\delta > 0$ выполнено неравенство

$$\int_{M_\delta} x^{2n-1} |q^*(x)| dx < \infty, \quad (50)$$

где M_δ есть множество значений x , для которых

$$x^{2n} |q^*(x)| \geq \alpha_n^2 - \delta,$$

то уравнение (36) неосцилляторно.

Доказательство. Преобразуя операцию (1) с помощью замены переменных (42), получаем для любой N -финитной функции $y \in \mathfrak{D}_L$

$$(l[y], y) = \int_{N'}^{\infty} \left| \frac{d^n u}{dt^n} \right|^2 dt + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{n-r} \beta_{2r} \int_{N'}^{\infty} \left| \frac{d^{n-r} u}{dt^{n-r}} \right|^2 dt + \\ + \int_{N'}^{\infty} \tilde{q}(t) |u|^2 dt + \alpha_n^2 \int_{N'}^{\infty} |u|^2 dt,$$

где

$$\tilde{q}(t) = x^{2n} q(x) \quad (x = \exp t).$$

Теперь достаточно установить неотрицательность функционала

$$F[u] = \int_{N'}^{\infty} \left| \frac{d^n u}{dt^n} \right|^2 dt + \int_{N'}^{\infty} \tilde{q}^*(t) |u|^2 dt + \alpha_n^2 \int_{N'}^{\infty} |u|^2 dt,$$

где

$$\tilde{q}^*(t) = x^{2n} q^*(x) \quad (x = \exp t).$$

Разобьем полуось $J = [0, \infty)$, как при доказательстве теоремы 2 п° 27, на два непересекающихся множества

$$J = \mathfrak{M} + \mathfrak{N},$$

определяемых условиями

$$|\tilde{q}^*(t)| < \alpha_n^2 - \delta \quad \text{при } x \in \mathfrak{M}, \\ |\tilde{q}^*(t)| \geq \alpha_n^2 - \delta \quad \text{при } x \in \mathfrak{N}.$$

Положим, далее,

$$J_{N'} = (N', \infty), \quad \mathfrak{M}_{N'} = J_{N'} \cap \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}_{N'} = J_{N'} \cap \mathfrak{N}$$

и, пользуясь условием (50), выберем число N' так, чтобы было

$$\int_{\mathfrak{N}_{N'}} |\tilde{q}^*(t)| dt < \min \left\{ 1, \frac{\delta^{4n-2}}{4^n} \right\}. \quad (51)$$

В силу однородности функционала $F[u]$ можно считать

$$\int_{N'}^{\infty} |u|^2 dt = 1. \quad (52)$$

Имеем, очевидно,

$$\int_{\mathfrak{M}_{N'}} q^*(t) |u|^2 dt + (\alpha_n^2 - \delta) \int_{\mathfrak{M}_{N'}} |u|^2 dt \geq 0,$$

так что

$$F[u] \geq \int_{N'}^{\infty} \left| \frac{d^n u}{dt^n} \right| dt + \int_{\mathfrak{M}_{N'}} \tilde{q}^*(t) |u|^2 dt + \delta \int_{N'}^{\infty} |u|^2 dt.$$

Обозначим через M максимальное значение финитной функции $|u(t)|$ на замкнутом множестве $\mathfrak{M}_{N'}$.

Если $M < \delta$, то, пользуясь нормировкой (52) и условием (51), получаем

$$\begin{aligned} F[u] &\geq \int_{\mathfrak{M}_{N'}} \tilde{q}^*(t) |u|^2 dt + \delta \int_{N'}^{\infty} |u|^2 dt \geq \\ &\geq \delta \left\{ 1 - \int_{\mathfrak{M}_{N'}} |\tilde{q}^*(t)| dt \right\} > 0. \end{aligned}$$

Если же $M \geq \delta$, то из неравенства (7) п° 26 и условия (51) следует

$$\begin{aligned} F[u] &\geq \int_{N'}^{\infty} \left| \frac{d^n u}{dt^n} \right|^2 dt - \int_{\mathfrak{M}_{N'}} |\tilde{q}^*(t)| |u|^2 dt \geq \\ &\geq M^2 \left\{ \frac{1}{4^n} M^{4n-2} - \int_{\mathfrak{M}_{N'}} |\tilde{q}^*(t)| dt \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в обоих случаях имеем $F[u] \geq 0$, что и требовалось доказать.

Условия теоремы 10 выполняются, в частности, если при некотором $r \geq 1$

$$\int_0^{\infty} x^{2nr-1} |q^*(x)|^r dx < \infty.$$

При $n = 1$, $r = 1$ отсюда вытекает известный признак неосцилляционности решений дифференциального уравнения второго порядка (см. [10]),

Следующая теорема дает интегральный признак осцилляторности уравнений (36) для отрицательных потенциалов.

Теорема 11 [31 (9)]. Если $q(x) \leq 0$ при больших x и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup x^{2n-1} \int_x^\infty |q(t)| dt > A_n^2, \quad (53)$$

где

$$A_n^{-1} = \frac{\sqrt{2n-1}}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1}}{2n-k},$$

то уравнение (36) осцилляторно.

Доказательство. Достаточно для любого $N > 0$ построить N -финитную функцию $y \in \mathfrak{D}_L$, для которой будет

$$\Phi[y] = \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx + \int_N^\infty q(x) |y|^2 dx < 0.$$

На основании леммы 5 п° 10 требование принадлежности функции y многообразию $\mathfrak{D}_L$ можно ослабить, предположив, что финитная функция $y(x)$ $2n$ -кратно непрерывно дифференцируема на оси, за исключением конечного числа точек, где она предполагается непрерывной вместе со своими производными лишь до порядка $n-1$. Для построения такой функции $y(x)$ введем сначала многочлен $\omega(z)$ степени $2n-1$, определяемый условиями

$$\begin{aligned} \omega(0) = 0, \quad \omega(1) = 1, \quad \omega^{(k)}(0) = \omega^{(k)}(1) = 0 \\ (k = 1, \dots, n-1). \end{aligned} \quad (54)$$

Считая справедливым равенство

$$\int_0^1 |\omega^{(n)}(z)|^2 dz = A_n^2, \quad (55)$$

которое будет проверено ниже, выберем, пользуясь соотношением (53), последовательность $\rho_k \rightarrow \infty$, для которой при некотором $\alpha > 0$ будет

$$\lim_{\rho_k \rightarrow \infty} \rho_k^{2n-1} \int_{\rho_k}^\infty |q(t)| dt \geq A_n^2 + \alpha,$$

и построим функцию $y(x)$ по формулам

$$y(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq \mu\rho), \\ \omega\left(\frac{x - \mu\rho}{\rho[1 - \mu]}\right) & (\mu\rho < x \leq \rho), \\ 1 & (\rho < x \leq R), \\ \omega\left(\frac{\nu R - x}{R[\nu - 1]}\right) & (R < x \leq \nu R), \\ 0 & x \geq \nu R \end{cases} \quad (56)$$

При этом сначала выберем параметр $\mu > 0$ настолько малым, чтобы было

$$\frac{A_n^2}{(1 - \mu)^{2n-1}} < A_n^2 + \frac{\alpha}{4},$$

затем параметр $\rho = \rho_k$ ($k = k_N$) так, чтобы было $\mu\rho < N$ и

$$\int_{\rho}^{\infty} |q(t)| dt > \frac{A_n^2 + \frac{\alpha}{2}}{\rho^{2n-1}},$$

что возможно в силу (53). Наконец, выберем параметры R , а затем ν настолько большими, чтобы было

$$\int_{\rho}^R |q(t)| dt > \frac{A_n^2 + \frac{\alpha}{2}}{\rho^{2n-1}}$$

и

$$\frac{A_n^2 \rho^{2n-1}}{R^{2n-1} (\nu - 1)^{2n-1}} < \frac{\alpha}{4}.$$

Вычисляя значение функционала $\Phi[y]$ на построенной функции y , получаем

$$\begin{aligned} \Phi[y] &\leq \frac{A_n^2}{\rho^{2n-1} (1 - \mu)^{2n-1}} + \frac{A_n^2}{R^{2n-1} (\nu - 1)^{2n-1}} - \int_{\rho}^R |q(t)| dt = \\ &= \frac{1}{\rho^{2n-1}} \left\{ \frac{A_n^2}{(1 - \mu)^{2n-1}} + \frac{A_n^2 \rho^{2n-1}}{R^{2n-1} (\nu - 1)^{2n-1}} - \right. \\ &\quad \left. - \rho^{2n-1} \int_{\rho}^R |q(t)| dt \right\} < 0 \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Теперь остается проверить равенство (55). Очевидно,

$$\omega'(z) = Cz^{n-1}(z-1)^{n-1},$$

так что

$$\omega(z) = C \int_0^z z^{n-1}(z-1)^{n-1} dz,$$

и так как должно быть $\omega(1) = 1$, то

$$C^{-1} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} \binom{n-1}{k-1}}{2n-k}. \quad (57)$$

Далее имеем

$$\int_0^1 |\omega^{(n)}(z)|^2 dz = \frac{C^2 [(n-1)!]^2}{2} \int_{-1}^1 |\mathcal{L}_{n-1}(\xi)|^2 d\xi,$$

где $\mathcal{L}_{n-1}(\xi)$ есть полином Лежандра

$$\mathcal{L}_{n-1}(\xi) = \frac{1}{2^{n-1}(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{d\xi^{n-1}} (\xi^2 - 1)^{n-1},$$

так что

$$\int_{-1}^1 |\mathcal{L}_{n-1}(\xi)|^2 d\xi = \frac{2}{2n-1},$$

и в силу (57) равенство (55) доказано.

Выбор в (56) в качестве сглаживающей функции полинома $\omega(z)$ не является при доказательстве данной и следующей теорем случайным. Естественное стремление получить наименьшее значение констант A_n и B_n в (53) и (58) приводит однозначно к сглаживанию с помощью полинома $\omega(z)$, определяемого интерполяционными условиями (54). Для того чтобы получить представление о точности признака (53), следует сравнить его с ранее установленным признаком неосцилляторности (37).

При $n = 1$ условие (53) принимает вид

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup x \int_x^\infty |q(t)| dt > 1,$$

и в этом случае теорема 11 дает признак, полученный ранее иным путем Е. Хилле в [105].

Вторую часть теоремы 9 уточняет следующая

Теорема 12 [31 (9)]. Если при больших x выполнено неравенство

$$q(x) + \alpha_n^2 x^{-2n} \leq 0$$

и

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} (\ln r) \int_r^\infty x^{2n-1} |q(x) + \alpha_n^2 x^{-2n}| dx = \infty, \quad (58)$$

то уравнение (36) осцилляторно.

Доказательство. Снова преобразуя операцию (1) с помощью замены переменных (42), получаем для любой N -финитной функции $y(x) \in \mathfrak{D}_L$ равенство

$$\begin{aligned} (l[y], y) = & \int_{N'}^\infty \left| \frac{d^n u}{dt^n} \right|^2 dt + \\ & + \sum_{r=1}^{n-1} (-1)^{n-r} \beta_{2r} \int_{N'}^\infty \left| \frac{d^{n-r} u}{dt^{n-r}} \right|^2 dt + \\ & + \int_{N'}^\infty \tilde{q}(t) |u|^2 dt + \alpha_n^2 \int_{N'}^\infty |u|^2 dt. \end{aligned}$$

С другой стороны, при $x = \exp t$ условие (58) принимает вид

$$\limsup_{\rho \rightarrow \infty} \rho \int_\rho^\infty |\tilde{q}(t) + \alpha_n^2| dt = \infty.$$

Поэтому при любом конечном B_n и, в частности, при значении B_n , определяемом в дальнейшем формулой (59), для $\alpha > 0$ существует последовательность $x_k \rightarrow \infty$, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k \int_{x_k}^\infty |\tilde{q}(t) + \alpha_n^2| dt > B_n^2 + \alpha.$$

Для доказательства теоремы достаточно при любом N построить N -финитную функцию $\varphi(t)$, для которой будет

$$F[\varphi] = \int_{N'}^{\infty} |\varphi^{(n)}(t)|^2 dt + \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^{n-j} \beta_{2j} \int_{N'}^{\infty} |\varphi^{(n-j)}(t)|^2 dt + \\ + \int_{N'}^{\infty} \{\tilde{q}(t) + \alpha_n^2\} |\varphi(t)|^2 dt < 0.$$

Как и при доказательстве предыдущей теоремы, определим функцию $\varphi(t)$ формулами (56), заменяя в них x на t . Полагая

$$-\beta_{2n-2} \int_0^1 |\omega'(z)|^2 dz = B_n^2, \quad (59)$$

будем иметь

$$F[\varphi] \leq \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{B_n^2}{1-\mu} + \rho \sum_{j=0}^{n-2} (-1)^{n-j} \beta_{2j} \left[\frac{1}{[\rho(1-\mu)]^{2(n-j)-1}} + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{[R(\nu-1)]^{2(n-j)-1}} \right] \cdot \int_0^1 |\omega^{(n-j)}(z)|^2 dz + \frac{\rho B_n^2}{R(\nu-1)} - \right. \\ \left. - \rho \int_{\rho}^R |\tilde{q}(t) + \alpha_n^2| dt \right\}.$$

Производя выбор параметров μ , ρ , R и ν аналогично выбору этих же параметров при доказательстве предыдущей теоремы, получим

$$F[\varphi] < 0,$$

что и требовалось доказать.

При проведении доказательства вместо (58) фактически использовалось менее ограничительное условие, состоящее в том, что левая часть (58) превосходит величину B_n^2 , определяемую равенством (59).

В отличие от предыдущих теорем приводимый ниже признак осцилляторности не связан с предположением об отрицательности потенциала.

Теорема 13 [31 (9)]. Если

$$\int_0^{\infty} q(x) dx = -\infty, \quad (60)$$

то уравнение (36) осцилляторно.

Доказательство. Снова используя построенную по формулам (56) функцию $y(x)$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi[y] = & \frac{A_n^2}{\rho^{2n-1}(1-\mu)^{2n-1}} + \frac{A_n^2}{R^{2n-1}(\nu-1)^{2n-1}} + \\ & + \int_{\mu\rho}^{\rho} S_{\rho}^2(x) q(x) dx + \int_{\rho}^R q(x) dx + \int_R^{\nu R} S_R^2(x) q(x) dx, \end{aligned}$$

где

$$S_{\rho}(x) = \omega(z) \quad \text{при} \quad z = \frac{x - \mu\rho}{\rho(1-\mu)},$$

$$S_R(x) = \omega(z) \quad \text{при} \quad z = \frac{\nu R - x}{R(\nu-1)}.$$

При $R < x < \nu R$ имеют, очевидно, место неравенства

$$S_R(x) > 0, \quad S_R'(x) < 0. \quad (61)$$

Фиксируя в формулах (56) произвольные положительные параметры $\mu < 1$, ρ и $\nu > 1$, выберем число R_0 так, чтобы при $R > R_0$ было

$$\begin{aligned} & \frac{A_n^2}{\rho^{2n-1}(1-\mu)^{2n-1}} + \frac{A_n^2}{R^{2n-1}(\nu-1)^{2n-1}} + \\ & + \int_{\mu\rho}^{\rho} S_{\rho}^2(x) q(x) dx + \int_{\rho}^R q(x) dx < 0. \quad (62) \end{aligned}$$

Далее положим

$$Q(x) = \int_{R_0}^x q(x) dx,$$

так что, в силу (60), будет

$$\lim_{x \rightarrow \infty} Q(x) = -\infty,$$

и обозначим через $R_1 \geq R_0$ последний корень функции $Q(x)$, так что при $x > R_1$ будет $Q(x) < 0$.

Считая в (56) $R = R_1$ и пользуясь неравенствами (61), получаем

$$\begin{aligned} \int_{R_1}^{vR_1} S_{R_1}^2(x) q(x) dx &= \int_{R_1}^{vR_1} S_{R_1}^2(x) Q'(x) dx = S_{R_1}^2(x) Q(x) \Big|_{R_1}^{vR_1} - \\ &- 2 \int_{R_1}^{vR_1} S_{R_1}(x) S'_{R_1}(x) Q(x) dx = \\ &= -2 \int_{R_1}^{vR_1} S_{R_1}(x) S'_{R_1}(x) Q(x) dx < 0. \end{aligned}$$

что в сочетании с (62) дает требуемое неравенство $\Phi[y] < 0$.

При $n = 1$ и $q(x) \geq 0$ теорема 13 дает признак, установленный А. Винтнером в [23 (5)]. Отметим также, что при $n = 1$, итерируя преобразование (42), легко прийти к следующему уточнению признака осцилляторности (40), принадлежащему Е. Хилле (см. также [10]).

Теорема 14. *Если при некотором $\delta > 0$ и некотором натуральном r для больших x имеет место неравенство*

$$q(x) < -\frac{1}{4x^2} - \frac{1}{4x^2 \ln^2 x} - \dots - \frac{1 + \delta}{4x^2 \ln^2 x \dots \ln_r^2 x}, \quad (63)$$

где $\ln_k = \ln \ln_{k-1}$, то при $n = 1$ уравнение (36) осцилляторно.

Следующие две теоремы, вытекающие из теорем 8 и 11 дают необходимые и достаточные условия h -устойчивой неосцилляторности и осцилляторности.

Теорема 15 [13 (5)]. *Для h -устойчивой неосцилляторности уравнения (36) достаточно, а в случае $q(x) \leq 0$ и необходимо, выполнение предельного соотношения*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2n-1} \int_x^\infty |q^*(t)| dt = 0. \quad (64)$$

Доказательство. Из условия (64) следует при любом $h > 0$ неравенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup x^{2n-1} \int_x^{\infty} \frac{1}{h} |q^*(t)| dt < \frac{\alpha_n^2}{2n-1}, \quad (65)$$

то есть выполнение условия (37) для уравнения (2), которое, следовательно, является неосцилляторным в силу теоремы 8.

Пусть теперь дано, что $q(x) \leq 0$ и уравнение (36) h -устойчиво неосцилляторно. Если бы, вопреки (64), было

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup x^{2n-1} \int_x^{\infty} |q(t)| dt = \gamma > 0,$$

то при некотором $h = h_0$ выполнялось бы неравенство

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup x^{2n-1} \int_0^{\infty} \frac{1}{h} |q(t)| dt > A_n^2, \quad (66)$$

совпадающее с условием (53) для уравнения (2), которое, следовательно, оказалось бы при $h = h_0$ осцилляторным в силу теоремы 11, а это противоречит h -устойчивой неосцилляторности уравнения (36).

Теорема 16 [13 (5)]. Для h -устойчивой осцилляторности уравнения (36) необходимо, а в случае, когда $q(x) \leq 0$, и достаточно, выполнение предельного соотношения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup x^{2n-1} \int_x^{\infty} |q^*(t)| dt = \infty. \quad (67)$$

Доказательство. Пусть уравнение (36) h -устойчиво осцилляторно. Если при этом условие (66) не выполнено, то для некоторого значения $h = h_0$ имеет место неравенство (65), откуда, на основании теоремы 8, следует неосцилляторность при $h = h_0$ уравнения (2), что противоречит h -устойчивой осцилляторности уравнения (36).

Обратно, если $q(x) \leq 0$ и выполнено условие (67), то тем самым при любом $h > 0$ выполнено неравенство (66), совпадающее с условием (53) для уравнения (2), которое, следовательно, является осцилляторным в силу теоремы 11.

Понятие h -устойчивой неосцилляторности и осцилляторности было впервые введено З. Нехари в [74], где такая неосцилляторность или осцилляторность называется сильной. Там же иным путем для случая $n = 1$ установлена теорема 16. Более раннее доказательство сильной осцилляторности уравнения (36) при условии (67) для случая $n = 1$ принадлежит Е. Хилле [105].

31. Положительная часть непрерывного спектра. Приводимые ниже признаки основаны на сравнении операции (1) с операцией

$$(-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}}, \quad (68)$$

непрерывная часть спектра которой покрывает полуось $\lambda \geq 0$.

Теорема 17 [31 (2)]. Если

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} |q(x)| = M < \infty, \quad (69)$$

то любой интервал полуоси $\lambda \geq 0$ длины, большей $2M$, содержит точки непрерывной части спектра оператора $\tilde{L}$.

Доказательство. Предположим, что $\lambda_0 > 0$ и $\delta > M$, но интервал $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ не содержит точек множества $C(\tilde{L})$. В силу принципа расщепления имеем

$$C(\tilde{L}) = C(\tilde{L}_\gamma),$$

и следовательно, при любом $\gamma \geq 0$ будет

$$C(\tilde{L}_\gamma) \cap [\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta] = \emptyset. \quad (70)$$

Если теперь выбрать точку расщепления γ так, чтобы при $x > \gamma$ было $|q(x)| \leq \delta_0 < \delta$, то из (70), пользуясь теоремой 7 п° 3, заключаем, что точка λ_0 не принадлежит непрерывной части спектра оператора, определяемого операцией (68) на полуоси $x \geq \gamma$, что абсурдно, так как непрерывная часть спектра этого оператора покрывает всю полуось $\lambda \geq 0$.

Для случая $n = 1$ в [97 (3)] впервые было показано, что при условии (69) множество $C(\tilde{L})$ не пусто.

Полагая в (69) $M = 0$, получаем следующий результат, который также непосредственно вытекает из теоремы 23 п° 8.

Теорема 18 [31 (2)]. Если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 0,$$

то вся полуось $\lambda \geq 0$ покрыта непрерывной частью спектра оператора $\tilde{L}$.

При $n = 1$ теорема 18 установлена впервые в [101].

Полагая

$$\sigma = \liminf_{x \rightarrow \infty} q(x), \quad \rho = \limsup_{x \rightarrow \infty} q(x)$$

и заменяя потенциал $q(x)$ функцией $q(x) - \frac{1}{2}(\sigma + \rho)$, выводим из теоремы 17 более точный результат.

Теорема 19 [31 (2)]. Если

$$\omega = \limsup_{x \rightarrow \infty} q(x) - \liminf_{x \rightarrow \infty} q(x), \quad (71)$$

то любой интервал полуоси $\lambda > \frac{1}{2}(\sigma + \rho)$ длины, большей ω , содержит точки непрерывной части спектра оператора $\tilde{L}$.

При $n = 1$ теорема 19 установлена иным путем в [79 (2)]. Эта теорема означает, что длина лакун, которые могут образоваться в непрерывной части спектра операции (68) при возмущении ее потенциалом $q(x)$, не превосходит колебания этого потенциала в бесконечности. Подробнее вопрос о лакунах в непрерывной части спектра для случая $n = 1$ рассматривается в главе V.

Теорема 19 допускает некоторое уточнение, состоящее в том, что в (71) можно считать точку x принадлежащей некоторому множеству, составляющему часть полуоси $x \geq 0$. Для этого уточнения и доказательства некоторых дальнейших теорем используется система пробных функций, получаемая с помощью следующего построения.

По произвольно заданным $\lambda \geq 0$ и $\eta > 0$ находим $2n$ -кратно непрерывно дифференцируемую финитную функцию $\varphi(x; \lambda, \eta)$, удовлетворяющую неравенству

$$\|(-1)^n \varphi^{(2n)} - \lambda \varphi\| < \eta \|\varphi\|.$$

Такая функция найдется в силу предложений п° 9, поскольку непрерывная часть спектра операции (68) покрывает

полуось $\lambda \geq 0$. Далее полагаем

$$\varphi_k(x) \equiv \varphi_k(x; \lambda, \eta) = \varphi(x - \alpha_k; \lambda, \eta) \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (72)$$

где числа α_k выбираются так, чтобы носители финитных функций $\varphi_j(x)$ и $\varphi_k(x)$ не пересекались при $j \neq k$. Беря линейную оболочку последовательности $\{\varphi_k(x)\}$, получим бесконечномерное линейное многообразие, на котором выполняется неравенство

$$\|(-1)^n \varphi^{(2n)} - \lambda \varphi\| < \eta \|\varphi\|.$$

В частности, можно положить при $\varepsilon > 0$

$$\varphi(x; \lambda, \eta) = \sqrt{\varepsilon} \varphi_0(\varepsilon x) \exp\left(ix \sqrt[2n]{\lambda}\right), \quad (73)$$

где $\varphi_0(x)$ — произвольная фиксированная $2n$ -кратно непрерывно дифференцируемая финитная функция с носителем $|x| \leq 1$, норма которой и максимум модуля равны единице. Очевидно, при фиксированном $\lambda \geq 0$ величина η будет стремиться к нулю вместе с ε .

Если в (72) функция $\varphi(x; \lambda, \eta)$ определена формулой (73), то при всех натуральных k будет

$$\|\varphi_k(x; \lambda, \eta)\| = 1$$

и

$$\max_{0 \leq x < \infty} |\varphi_k(x; \lambda, \eta)| = \sqrt{\varepsilon}.$$

Опираясь на общую теорему 9 п° 3 и используя пробную систему функций (72), получаем следующий результат, содержащий теоремы 17, 18 и 19.

Теорема 20 [31 (3)]. Если J' есть множество точек полуоси $x \geq 0$, содержащее интервалы любой длины и

$$\omega = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup q(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} \inf q(x) \quad (x \in J'), \quad (74)$$

то при

$$\lambda > \lim_{x \rightarrow \infty} \inf q(x) \quad (x \in J')$$

длина лакуны в $C(\tilde{L})$ с серединой в точке λ не превосходит ω .

Следующие три теоремы дают интегральные признаки непрерывности положительной части спектра.

Теорема 21 [31 (3)]. Если при любом $\delta > 0$ выполняется неравенство

$$\int_{M_\delta} |q(x)|^2 dx < \infty, \quad (75)$$

где M_δ есть множество значений x , для которых $|q(x)| > \delta$, то положительная часть спектра оператора $\tilde{L}$ покрывает полуось $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Используя пробную систему функций, определенную формулами (72), (73), получаем при любом $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} \|\tilde{L}\varphi_k - \lambda\varphi_k\| &\leq \eta\|\varphi_k\| + \|q\varphi_k\| \leq \eta\|\varphi_k\| + \\ &+ \left[\int_{J-M_\delta} |q(x)\varphi_k(x)|^2 dx \right]^{1/2} + \\ &+ \left[\int_{M_\delta} |q(x)\varphi_k(x)|^2 dx \right]^{1/2} \leq \rho(\varepsilon, \delta)\|\varphi_k\|, \quad (76) \end{aligned}$$

где

$$J = [0, \infty), \quad \rho(\varepsilon, \delta) = \eta + \delta + \sqrt{\varepsilon} \left\{ \int_{M_\delta} |q(x)|^2 dx \right\}^{1/2}.$$

Из неравенства (76) и теоремы 9 п° 3 следует, что

$$C(\tilde{L}) \cap [\lambda - \rho(\varepsilon, \delta), \lambda + \rho(\varepsilon, \delta)] \neq \emptyset,$$

а так как величина $\rho(\varepsilon, \delta)$ может быть сделана сколь угодно малой вместе с ε и δ , то $\lambda \in C(\tilde{L})$, что и требовалось доказать.

Легко видеть, что (75) влечет (11). Поэтому условие (75) обеспечивает соотношение $C(\tilde{L}) = [0, \infty)$. Очевидно также, что в условии теоремы 21, как и в (74), можно считать $x \in J'$.

Теорема 22. Если для некоторой последовательности интервалов Δ_k неограниченно возрастающей длины $|\Delta_k|$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Delta_k|} \int_{\Delta_k} |q(x)|^2 dx = 0,$$

то положительная часть спектра оператора $\tilde{L}$ покрывает всю полуось $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Положив в (73)

$$\varepsilon = \varepsilon_k = \frac{1}{2|\Delta_k|}$$

и взяв в (72) в качестве точек α_k середины интервалов Δ_k , получим нормированную последовательность функций

$$\varphi_k(x) = \varphi(x - \alpha_k; \lambda, \eta),$$

для которой будет

$$\begin{aligned} \|\tilde{L}\varphi_k - \lambda\varphi_k\| &\leq \eta_k \|\varphi_k\| + \|q\varphi_k\| \leq \\ &\leq \eta_k + \left\{ \frac{1}{2|\Delta_k|} \int_{\Delta_k} |q(x)|^2 dx \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

так что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{L}\varphi_k - \lambda\varphi_k\| = 0,$$

откуда следует включение $\lambda \in C(\tilde{L})$.

Следующая теорема требует использования пробной системы

$$\varphi_k(x; \lambda, \varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} \varphi_0(\varepsilon[x - \alpha_k]) e_k(x; \lambda), \quad (77)$$

где $e_k(x; \lambda)$ есть решение уравнения

$$(-1)^n y^{(2n)} + q(x)y = \lambda y,$$

удовлетворяющее при $x = \alpha_k$ условиям

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dx^r} e_k(x; \lambda) \Big|_{x=\alpha_k} &= \frac{d^r}{dx^r} \exp \left\{ i \sqrt[2n]{\lambda} (x - \alpha_k) \right\} \Big|_{x=\alpha_k} \\ (r &= 0, 1, \dots, 2n - 1). \end{aligned}$$

Предварительно отметим следующую простую лемму.

Лемма 1. Если последовательность функций $q_m(x)$ при некотором $a < \infty$ удовлетворяет условию

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_0^a |q_m(x)| dx = 0,$$

то для решения $\varphi_m(x; \lambda)$ уравнения

$$(-1)^n y^{(2n)} + q_m(x)y = \lambda y, \quad (78)$$

удовлетворяющего начальным условиям

$$\left. \frac{d^r}{dx^r} \varphi_m(x; \lambda) \right|_{x=0} = \left. \frac{d^r}{dx^r} \exp(i \sqrt[2n]{\bar{\lambda} x}) \right|_{x=0} \quad (79)$$

$$(r = 0, 1, \dots, 2n - 1),$$

будет в смысле равномерной сходимости в интервале $[0, a]$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m^{(r)}(x; \lambda) = \frac{d^r}{dx^r} \exp(i \sqrt[2n]{\bar{\lambda} x}) \quad (r = 0, 1, \dots, 2n - 1). \quad (80)$$

Доказательство. Из (78) и (79) следует, что функция $\varphi_m(x; \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра

$$\varphi_m(x; \lambda) = \exp(i \sqrt[2n]{\bar{\lambda} x}) - \int_0^x K(x, s) q_m(s) \varphi_m(s; \lambda) ds, \quad (81)$$

где $K(x, s)$ есть функция Коши дифференциального уравнения (78) при $q_m(x) \equiv 0$. Применяя к этому интегральному уравнению метод последовательных приближений или, пользуясь неравенством

$$|\varphi_m(x; \lambda)| \leq 1 + \int_0^x |K(x, s)| |q_m(s)| |\varphi_m(s; \lambda)| ds$$

и леммой из [61 (1), (стр. 54)], получим оценку

$$|\varphi_m(x; \lambda)| \leq \exp \left\{ M \int_0^a |q_m(s)| ds \right\},$$

где

$$M = \max_{0 \leq s < x \leq a} |K(x, s)|,$$

так что функции $\varphi_m(x; \lambda)$ при $m \rightarrow \infty$ остаются равномерно ограниченными в интервале $0 \leq x \leq a$. Но тогда из (81) и соотношений

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dx^r} \varphi_m(x; \lambda) &= \\ &= \frac{d^r}{dx^r} \exp(i \sqrt[2n]{\bar{\lambda} x}) - \int_0^x \frac{\partial^r K(x, s)}{\partial x^r} q_m(s) \varphi_m(s; \lambda) ds \end{aligned}$$

следует (80), что и требовалось установить.

Теорема 23. [31 (3)]. Если для некоторой последовательности интервалов Δ_k неограниченно растущей длины $|\Delta_k|$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Delta_k} |q(x)| dx = 0,$$

то положительная часть спектра оператора $\tilde{L}$ покрывает полуось $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Положив в (77)

$$\varepsilon = \varepsilon_k = \frac{1}{2|\Delta_k|}$$

и приняв в качестве точек α_k середины интервалов Δ_k , получим нормированную последовательность функций $\{\varphi_k\}$, для которой

$$L\varphi_k - \lambda\varphi_k = V^{-\varepsilon} \sum_{v=1}^{2n} \binom{2n}{v} \varepsilon^v \varphi_0^{(v)} e_k^{(2n-v)}.$$

Отсюда и из равенства (80) следует при любом положительном λ предельное соотношение

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\tilde{L}\varphi_k - \lambda\varphi_k\| = 0,$$

так что $\lambda \in C(\tilde{L})$.

Для случая $n=1$ теоремы 21 и 23 дают, в частности, полученные ранее иным путем признаки: Патнама $q(x) \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$ [79 (1)], Валлаха $\sqrt{x}q(x) \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$ [19 (1)] и Г. Вейля $q(x) \in \mathcal{L}_1(0, \infty)$ ([20 (2)], см. также [61 (1)]).

Отметим, что все признаки настоящего пункта, обеспечивающие соотношение $[0, \infty) \subset C(\tilde{L})$, сохраняются при замене $q(x)$ на $\frac{1}{h}q(x)$ и, следовательно, обеспечивают h -устойчивость этого свойства. Еще один признак такого рода дает следующая

Теорема 24. Если при некотором (a значит, и при любом) $\omega \neq 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+\omega} |q(t)|^2 dt = 0, \quad (82)$$

то вся положительная λ -полуось принадлежит $C(\tilde{L})$.

Доказательство. Если $\lambda > 0$, то точка λ принадлежит непрерывной части спектра операции (68) и, следова-

тельно, существует в $\mathfrak{D}_L$ нормированная последовательность финитных функций $\{\varphi_k(x)\}$ с непересекающимися носителями, для которой

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|(-1)^n \varphi_k^{(2n)} - \lambda \varphi_k\| = 0. \quad (83)$$

Далее, из (83) следует, что квадратичный функционал

$$\int_0^\infty (|y^{(n)}|^2 + |y|^2) dx$$

ограничен на последовательности $\{\varphi_k\}$ числом, не зависящим от k , то есть

$$\int_0^\infty (|\varphi_k^{(n)}|^2 + |\varphi_k|^2) dx < C.$$

С другой стороны, в силу (82) и неравенства 18 п° 27, для произвольно заданного $\eta > 0$ будет при $k > N_\eta$

$$\int_0^\infty q^2 \varphi_k^2 dx < 2\eta(1 + C_n) \int_0^\infty (|\varphi_k^{(n)}|^2 + |\varphi_k|^2) dx < 2C(1 + C_n)\eta.$$

Таким образом, имеем неравенство

$$\begin{aligned} \|L\varphi_k - \lambda\varphi_k\| &\leq \|(-1)^n \varphi_k^{(2n)} - \lambda\varphi_k\| + \|q\varphi_k\| \leq \\ &\leq \|(-1)^n \varphi_k^{(2n)} - \lambda\varphi_k\| + \sqrt{2C(1 + C_n)\eta}, \end{aligned}$$

откуда

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|L\varphi_k - \lambda\varphi_k\| = 0$$

и, следовательно, $\lambda \in C(\tilde{L})$, что и требовалось установить.

Следующий критерий компактности М. Ш. Бирмана, по существу, уже встречался ранее, при доказательстве теорем 3 и 4.

Лемма 2 [13 (5)]. Пусть оператор A в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ определен равенством

$$Ay = (-1)^n y^{(2n)} + y \quad (84)$$

на $\dot{C}_{2n}(0, \infty)$. Для того чтобы любое A -ограниченное множество функций из $\mathfrak{D}_A$ было компактным в $\mathcal{L}_p^2(0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы при некотором

(а значит, и при любом) $\omega > 0$ было

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+\omega} \rho(t) dt = 0. \quad (85)$$

Доказательство. Если бы при каком-нибудь $\omega > 0$ для некоторой числовой последовательности $x_k \rightarrow \infty$ было

$$\int_{x_k}^{x_k+\omega} \rho(x) dx > \rho > 0,$$

то (см. доказательство теоремы 4) существовала бы в $\mathfrak{D}_A$ бесконечная A -нормированная последовательность финитных функций с непересекающимися носителями, удовлетворяющая неравенству

$$\int_0^\infty \rho(x) |\varphi_k(x)|^2 dx > \rho.$$

Но это неравенство несовместимо с компактностью в $\mathcal{L}_\rho^2(0, \infty)$ A -нормированной последовательности $\{\varphi_k\}$, так как для последней, в силу теоремы Хаусдорфа об ε -сети, для любого $\varepsilon > 0$ и соответствующего $N = N_\varepsilon$ должно быть при всех k

$$\int_N^\infty \rho(x) |\varphi_k(x)|^2 dx < \varepsilon.$$

Таким образом, необходимость условия (85) доказана. Для доказательства достаточности этого условия выводим из него, как ранее при доказательстве теоремы 3, существование при любом $\varepsilon > 0$ числа $N = N_\varepsilon$ такого, чтобы для любой функции $y \in \mathfrak{D}_A$ выполнялось неравенство

$$\int_N^\infty \rho(x) |y|^2 dx \leq \varepsilon \int_N^\infty (|y^{(n)}|^2 + |y|^2) dx. \quad (86)$$

Если теперь $\mathfrak{M}$ есть некоторое A -ограниченное множество функций из $\mathfrak{D}_A$, то для всех $y \in \mathfrak{M}$ имеем

$$\int_0^\infty (|y^{(n)}|^2 + |y|^2) dx < C \quad (87)$$

и, тем более,

$$\int_0^{\infty} |y^{(n)}|^2 dx < C. \quad (88)$$

Из (88) следует компактность $\mathfrak{M}$ в смысле сходимости в $\mathcal{L}_p^2(0, N)$. Далее, используя неравенства (86), (87) и компактность $\mathfrak{M}$ в $\mathcal{L}_p^2(0, N)$, построим, как при доказательстве теоремы 25 п° 8, конечную ε -сеть, откуда вытекает компактность $\mathfrak{M}$ в $\mathcal{L}_p^2(0, \infty)$.

При доказательстве следующей теоремы М. Ш. Бирмана используется лишь достаточность установленного выше критерия полной непрерывности оператора вложения H_A в $\mathcal{L}_p^2(0, \infty)$.

Теорема 25 [13(5)]. *Если при некотором (а следовательно, и при любом) $\omega > 0$*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+\omega} |q(t)| dt = 0, \quad (89)$$

то непрерывная часть спектра оператора $\tilde{L}$ совпадает с полусью $\lambda \geq 0$.

Доказательство основано на общих предложениях об относительно полной непрерывности. Из леммы 2 и теоремы 16 п° 4 следует полная непрерывность оператора умножения на $|q(x)|$ относительно положительно определенного оператора (84). Но тогда, в силу теоремы 17 п° 4, оператор умножения на $q(x)$ также вполне непрерывен относительно A . Поэтому на основании теоремы 19 п° 5 непрерывные части спектров операций (84) и

$$(-1)^n y^{(2n)} + y + q(x)y$$

совпадают. Теорема доказана.

Установленный теоремой 25 признак (89) является в некотором смысле и необходимым для равенства

$$C(\tilde{L}) = [0, \infty), \quad (90)$$

а именно: если для некоторого h -устойчиво полуограниченного оператора $\tilde{L}$ с отрицательным потенциалом $q(x) \leq 0$ свойство (90) является h -устойчивым, то выполняется условие (89). Это утверждение непосредственно следует из

теоремы 4, так как отрицательная часть спектра такого оператора является, очевидно, h -устойчиво ограниченной и дискретной.

32. Спектральная альтернатива для полуограниченных операторов Шредингера. При исследовании характера спектра оператора $\tilde{L}$ не встречался случай, когда множество $C(\tilde{L})$, будучи непустым, было бы ограничено сверху. В связи с этим возникает вопрос о справедливости альтернативы: либо множество $C(\tilde{L})$ пусто, либо оно не ограничено сверху (см. [23 (3)]). При $n = 1$, то есть для операции Шредингера

$$-y'' + q(x)y, \quad (91)$$

указанная альтернатива впервые установлена К. Патнамом [79 (4)] при условии $q(x) \geq 0$. Тем самым она справедлива для всех случаев, когда потенциал $q(x)$ ограничен снизу. Настоящий пункт посвящен доказательству двух теорем К. Патнама в несколько более общей форме, когда требование неотрицательности потенциала заменяется менее ограничительным условием h -устойчивой положительности оператора L , определяемого операцией (91).

Теорема 26 [79 (4)]. *Если оператор L , определяемый операцией (91), h -устойчиво положителен, то непрерывная часть его спектра либо отсутствует, либо не ограничена сверху; в последнем случае длина лакуны в $C(L)$ с центром в точке λ при $\lambda \rightarrow \infty$ не превосходит $O(\sqrt{\lambda})$.*

Доказательство. Если $C(L) \neq \emptyset$, то некоторое отрицательное $\lambda < a$ принадлежит $C(L)$ и, согласно п° 9, существует в $\mathfrak{D}_L$ нормированная последовательность финитных функций $\{\varphi_k(x)\}$ с непересекающимися носителями такая, что

$$\|L\varphi_k\| \leq a. \quad (92)$$

При этом в силу h -устойчивой положительности оператора L будет при $0 < h < 1$

$$(1 - h)\|\varphi'_k\|^2 < \int_0^\infty (|\varphi'_k|^2 + q|\varphi_k|^2) dx = (L\varphi_k, \varphi_k) \leq a. \quad (93)$$

Полагая

$$\psi_k(x) = \varphi_k(x) \cos \sqrt{\lambda}x,$$

получаем

$$L\psi_k - \lambda\psi_k = L[\varphi_k] \cos \sqrt{\lambda}x + 2\sqrt{\lambda}\varphi'_k(x) \sin \sqrt{\lambda}x.$$

так что

$$\|L\psi_k - \lambda\psi_k\| \leq \|L\varphi_k\| + 2\sqrt{\lambda}\|\varphi'_k\|.$$

Отсюда и из (93) вытекает неравенство

$$\|L\psi_k - \lambda\psi_k\| < a + \sqrt{\frac{a\lambda}{1-h}}. \quad (94)$$

Теперь для получения из неравенства (94) информации относительно длины лакун в $C(L)$ следует оценить снизу нормы функций ψ_k . При этом функции φ_k можно считать вещественными, ибо в противном случае можно было бы заменить φ_k на $\operatorname{Re} \varphi_k$ или $\operatorname{Im} \varphi_k$, выбирая из двух вариантов тот, при котором норма новой пробной функции была бы меньше $1/\sqrt{2}$.

Имеем

$$\begin{aligned} \|\psi_k\|^2 &= \int_0^\infty |\varphi_k(x)|^2 \cos^2 \sqrt{\lambda}x \, dx = \\ &= \frac{1}{2}\|\varphi_k\|^2 + \frac{1}{2} \int_0^\infty |\varphi_k(x)|^2 \cos 2\sqrt{\lambda}x \, dx, \end{aligned} \quad (95)$$

но

$$\int_0^\infty |\varphi_k(x)|^2 \cos 2\sqrt{\lambda}x \, dx = -\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty \varphi_k(x) \varphi'_k(x) \sin 2\sqrt{\lambda}x \, dx$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_0^\infty \varphi_k^2(x) \cos 2\sqrt{\lambda}x \, dx \right| &\leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\infty |\varphi_k(x) \varphi'_k(x)| \, dx \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|\varphi_k\| \|\varphi'_k\| \end{aligned}$$

или, в силу (93),

$$\left| \int_0^\infty \varphi_k^2(x) \cos 2\sqrt{\lambda}x \, dx \right| \leq \sqrt{\frac{a}{\lambda(1-h)}}. \quad (96)$$

Из (95) и (96) следует

$$\|\psi_k\|^2 > \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a}{\lambda(1-h)}}, \quad (97)$$

а тогда из неравенства (94) вытекает соотношение, которое при $\lambda \rightarrow \infty$ может быть представлено в виде

$$\|L\psi_k - \lambda\psi_k\| \leq O(\sqrt{\lambda})\|\psi_k\|,$$

откуда следует, что расстояние точки λ от $C(L)$ не превосходит $O(\sqrt{\lambda})$. Отсюда, в частности, вытекает неограниченность множества $C(L)$ сверху.

Следующая теорема показывает, что в том случае, когда точка $\lambda = 0$ принадлежит непрерывной части спектра h -устойчиво положительного оператора Шредингера, непрерывная часть спектра этого оператора покрывает сплошь всю полуось $\lambda \geq 0$.

Теорема 27 [79(4)]. *Если оператор L , определяемый операцией (91), h -устойчиво положителен, то либо точка $\lambda = 0$ не принадлежит непрерывной части его спектра, либо непрерывная часть спектра $C(L)$ покрывает всю полуось $\lambda \geq 0$.*

Доказательство. Если точка $\lambda = 0$ принадлежит $C(L)$, то для некоторой нормированной последовательности финитных функций $\varphi_k(x) \in \mathfrak{D}_L$ с непересекающимися носителями будет

$$\lim_{k \rightarrow \infty} L\varphi_k = 0,$$

то есть вместо неравенства (92) будем при $k \rightarrow \infty$ иметь

$$\|L\varphi_k\| = o(1).$$

Но тогда, заменяя в (94) и (97) числа a на $o(1)$, получим для произвольного фиксированного $\lambda > 0$ при $k \rightarrow \infty$ соотношение

$$\|L\psi_k - \lambda\psi_k\| = o(1),$$

откуда вытекает принадлежность точки λ множеству $C(L)$.

Очевидно, обе теоремы настоящего пункта сохраняют силу, если h -устойчиво положителен оператор, определяемый операцией (91) на полуоси $x \geq N$ при некотором $N > 0$. В частности, для справедливости этих теорем достаточно предположить

$$\liminf_{x \rightarrow \infty} q(x) \geq 0.$$

Пользуясь критерием А. М. Молчанова, Р. С. Исмагилов перенес спектральную альтернативу, выражаемую теоремой 26, на случай двучленной операции (1) любого порядка $2n$ с ограниченным снизу потенциалом $q(x)$. При этом $O(\sqrt[n]{\lambda})$ заменяется на $O(\sqrt[2n]{\lambda})$.

Соответствующее доказательство можно провести следующим образом. Если $C(L) \neq \emptyset$, то, по теореме 6 А. М. Молчанова, существует бесконечная последовательность непересекающихся интервалов ω_k одинаковой длины, для которой

$$\int_{\omega_k} q(x) dx < C. \quad (98)$$

Здесь $C < \infty$ и можно считать $q(x) \geq 1$. Требуется установить, что при достаточно больших λ будет $C(L) \cap [\lambda, \lambda + O(\sqrt[n]{\lambda})] \neq \emptyset$. Для этого достаточно найти в $\mathfrak{D}_L$ бесконечномерное многообразие G , на котором было бы

$$\|L[\varphi] - \lambda\varphi\| < \delta \|\varphi\| \quad (99)$$

при $\delta = O(\sqrt[n]{\lambda})$.

В силу известных асимптотических формул существует такое число $\mu > 0$, что при $\lambda > \mu$ в любом интервале $[\lambda, \lambda + O(\sqrt[n]{\lambda})]$ имеются собственные значения операции (91) на интервале ω_1 с нулевыми граничными условиями. Можно, очевидно, считать, что таких собственных значений имеется несколько, так что из соответствующих им собственных функций можно образовать линейную комбинацию, входящую в $\mathfrak{D}_L$. Так как для каждой из этих собственных функций выполнено неравенство (99), то оно же будет иметь место на указанной их линейной комбинации $\varphi_1 \in \mathfrak{D}_L$. Далее, можно показать, что благодаря условию (98) место μ , с которого «начинается асимптотика», не зависит от k . В частности, при $n = 2$ это, по существу, установлено в [67 (1)]. При $n > 2$ надлежит проследить за выкладками в [82 (2)] или [72 (3)]. Построив теперь в каждом интервале ω_k при $k \geq 2$ соответствующую функцию $\varphi_k \in \mathfrak{D}_L$, получим на бесконечномерной оболочке финитных функций $\varphi_k(x)$ с непересекающимися носителями неравенство (99).

Таким образом устанавливается спектральная альтернатива для операции (1) при любом n .

33. Случай, когда спектр оператора Шредингера покрывает всю ось. В этом случае потенциал должен, очевидно, быть неограниченным снизу. Но так как неограниченность потенциала снизу еще не влечет неограниченности снизу оператора L (см., например, теорему 2 п° 27), подчиним потенциал более ограничительному условию, предположив, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = -\infty.$$

При этом условии спектр $S(\tilde{L})$ будет неограниченным не только сверху, но и снизу, как в этом легко убедиться, рассматривая соответствующий квадратичный функционал на бесконечной системе финитных функций с непересекающимися носителями, образованных с помощью сдвига из фиксированной финитной функции, принадлежащей $\mathfrak{D}_L$.

Е. Титчмарш и Д. Сиерс установили [88], что при выполнении некоторых дополнительных условий для случая $n = 1$ спектр $S(L)$ покрывает всю λ -ось, если потенциал стремится к $-\infty$ достаточно медленно, и дискретен — в противном случае (см. также [61 (1)]). Это предложение было обобщено асимптотическими методами на дифференциальную операцию любого порядка И. М. Рапопортом [82 (2)].

В настоящем пункте устанавливается признак непрерывности спектра, близкий к упомянутому признаку Титчмарша — Сиерса.

Теорема 28. Пусть дифференцируемая функция $q(x)$ при $x \rightarrow \infty$ монотонно стремится к $-\infty$, сохраняя при больших x направление выпуклости. Если стремление потенциала к $-\infty$ настолько медленное, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{q'(x)}{\sqrt{|q(x)|}} = 0, \quad (100)$$

то спектр оператора Шредингера покрывает сплошь всю λ -ось.

Доказательство. Предполагая сначала функцию $q(x)$ дважды непрерывно дифференцируемой и возводя операцию (91) в квадрат, получаем

$$(L^2 y, y) = \int_0^\infty \{|y''|^2 + 2q|y'|^2 + (q^2 - q'')|y|^2\} dx.$$

Если λ_0 — произвольное вещественное число, то для доказательства принадлежности λ_0 к $S(L)$, в соответствии с результатами п° 10, достаточно установить, что для произвольно малого $\alpha > 0$ при любом $N > 0$ существует N -финитная функция $y \in \mathfrak{D}_{L^2}$, для которой будет

$$\Phi[y] = \int_0^\infty \{|y''|^2 - 2\rho|y'|^2 + (\rho^2 + \rho'' - \alpha)|y|^2\} dx < 0, \quad (101)$$

где $\rho(x) = \lambda_0 - q(x)$. При этом, очевидно, $\lim_{x \rightarrow \infty} \rho(x) = \infty$ и для некоторого $\gamma > 0$ при всех $x > \gamma$ будет

$$\rho(x) > 0, \quad \rho(x) \geq 0, \quad \rho''(x) \geq 0 \quad (\text{или } \leq 0)$$

и

$$\rho'(x) = o(\sqrt{\rho(x)})$$

Положим при некоторых натуральных m и $n > m$

$$y(x) = \begin{cases} 0 & (t < m\pi), \\ \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right) \sin t & (m\pi \leq t \leq n\pi), \\ 0 & (t > n\pi), \end{cases} \quad (102)$$

где

$$t = \int_{\gamma}^x \sqrt{\rho(x)} dx.$$

Если сгладить функцию $y(x)$ в точке $t = m\pi$ так, чтобы при $t = m\pi$ ее первая производная была непрерывна, то, в соответствии с леммой 5 п° 10, достаточно установить неравенство (101) для построенной функции (102). Несколько откладывая это сглаживание и подставляя функцию (102) в левую часть неравенства (101), получаем

$$\Phi[y] = \int_0^{\infty} f(t; n) dt, \quad (103)$$

где

$$\begin{aligned} f(t; n) = & \rho^{3/2} \left[\frac{2}{n^2 \pi^2} \cos 2t + \frac{2}{n^2 \pi^2} \cos^2 t + \right. \\ & + \frac{4}{n\pi} \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right) \sin 2t - 2 \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right)^2 \cos 2t \Big] + \\ & + \frac{\dot{\rho}^2}{4 \sqrt{\rho}} \left[\frac{1}{n^2 \pi^2} \sin^2 t - \frac{1}{n\pi} \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right) \sin 2t + \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right)^2 \cos^2 t \right] + \\ & + \dot{\rho} \sqrt{\rho} \left[\frac{1}{n^2 \pi^2} \sin 2t - \frac{1}{n\pi} \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right) \cos 2t - \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right) \frac{1}{n\pi} \cos^2 t - \right. \\ & - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right)^2 \sin 2t - \frac{2}{n\pi} \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right) \sin^2 t + 2 \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right)^2 \sin t \Big] - \\ & \quad \left. - \frac{\alpha}{\sqrt{\rho}} \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right)^2 \sin^2 t. \right. \end{aligned}$$

При этом функция $\rho[t] = \rho(x)$, в силу условий теоремы, обладает следующими свойствами: $\dot{\rho} \sqrt{\rho}$ не убывает (или не возрастает), $\dot{\rho} \geq 0$, $\dot{\rho}(t) = o(1)$ и $\rho[t] = o(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Используя эти свойства при оценке интеграла (103), с помощью интегрирования по частям и второй теоремы о среднем значении легко получим при фиксированном m равенство

$$\Phi[y] = o(\sqrt{n}) - \alpha \int_{m\pi}^{n\pi} \frac{1}{\sqrt{\rho}} \left(1 - \frac{t}{n\pi}\right)^2 \sin^2 t \, dt.$$

Интеграл в правой части полученного соотношения при $n \rightarrow \infty$ положителен и стремится к бесконечности быстрее, чем $\sqrt{n}$, так что при достаточно большом n будет

$$\Phi[y] < 0.$$

Это неравенство, очевидно, сохранится, если сначала сгладить функцию (102), устранив разрыв первой производной в точке $t = m\pi$, а затем взять n достаточно большим.

Теперь остается освободиться от дополнительного предположения о гладкости потенциала. При этом, в силу теоремы 23 п° 8, достаточно установить, что по любой функции $q(x)$, удовлетворяющей условиям теоремы 28, можно построить дважды непрерывно дифференцируемую функцию $\tilde{q}(x)$, так же удовлетворяющую всем условиям теоремы 28 и еще условию

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \{q(x) - \tilde{q}(x)\} = 0.$$

Для построения функции $\tilde{q}(x)$ выберем сначала положительную функцию $\varepsilon(x)$, стремящуюся к нулю при $x \rightarrow \infty$ с производной $\varepsilon'(x) = o[\rho'(x)]$. Из условия (100) для функции $q(x)$ вытекает это же условие для любой функции $\tilde{q}(x)$, удовлетворяющей неравенствам

$$|q(x) - \tilde{q}(x)| < \varepsilon(x), \quad |q'(x) - \tilde{q}'(x)| < \varepsilon'(x) \quad (104)$$

Если потенциал $q(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 28, то нетрудно видеть, что среди функций $q(x)$, удовлетворяю-

щих неравенствам (104), существуют дважды непрерывно дифференцируемые функции, которые при $x \rightarrow -\infty$ стремятся к $-\infty$ монотонно, сохраняя направление выпуклости. Этим завершается доказательство теоремы 28.

Из доказанной теоремы, в частности, следует, что если потенциал $q(x)$, сохраняя направление выпуклости, стремится монотонно к $-\infty$ медленнее, чем $-x^2$, то непрерывная часть спектра оператора $S(L)$ покрывает всю λ -ось. С другой стороны, из теоремы Титчмарша — Сиерса следует, что при том же характере стремления потенциала к $-\infty$ со скоростью большей, чем $-x^2$, спектр $S(\tilde{L})$ оператора $\tilde{L}$ будет дискретным.

34. Примеры исследования характера спектра в случае одночленной операции. Изложенные методы применимы и к *одночленной* дифференциальной операции

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \left(p \frac{d^n y}{dx^n} \right) \quad (x \geq 0, \quad p(x) > 0). \quad (105)$$

Пусть сначала $n = 1$, так что операция (105) имеет вид

$$\mu[y] = -\frac{d}{dx} p \frac{dy}{dx}.$$

Порождаемые операцией (105) самосопряженные операторы обозначим через $\tilde{L}$.

Имея в виду выделить из операции $\mu[y]$ полный квадрат, введем операцию первого порядка

$$\nu[y] = i\rho \frac{d}{dx} \rho, \quad (106)$$

где $\rho(x) > 0$ при $x \geq 0$. Продолжим четно $\rho(x)$ на всю ось и обозначим через P минимальный замкнутый симметрический оператор, порождаемый операцией $\mu[y]$ в $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$. Так как общее решение уравнения $P^*z - \lambda z = 0$ есть

$$z = \frac{C}{\rho} \exp \left\{ -i\lambda \int_0^x \frac{dx}{\rho^2} \right\},$$

то при $\frac{1}{\rho(x)} \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$ оба дефектных числа оператора P

равны единице, а при $\frac{1}{\rho(x)} \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$ оператор P самосопряжен.

Обозначая при $\operatorname{Im} \lambda = 0$ через U_λ унитарный в $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ оператор умножения на функцию

$$\exp \left\{ -i\lambda \int_0^x \frac{dx}{\rho^2} \right\},$$

имеем для любой финитной функции $y \in \mathfrak{D}_L$

$$U_\lambda^* P U_\lambda y = (P + \lambda I) y,$$

так что

$$U_\lambda^* P U_\lambda = P + \lambda I.$$

Если оператор P самосопряжен, то из последнего соотношения вытекает, что его вещественный спектр, будучи непустым множеством, должен заполнять всю λ -ось.

Предполагая функцию $\rho(x)$ достаточно гладкой и выделяя из $\mu[y]$ полный квадрат операции (106), получаем

$$-\frac{d}{dx} \rho \frac{dy}{dx} = -\rho \frac{d}{dx} \rho^2 \frac{d}{dx} \rho y + \frac{1}{3} (\rho^3)'' \rho y,$$

то есть

$$\mu[y] = \nu^2[y] + \frac{1}{3} (\rho^3)'' \rho y,$$

где $\rho = \sqrt[4]{p}$.
Если

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho (\rho^3)'' = +\infty, \quad (107)$$

то (см. доказательство теоремы 5 п° 28) спектр оператора $\tilde{L}$ полуограничен снизу и дискретен, а если существует конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \rho (\rho^3)'' = \beta, \quad (108)$$

то, в силу теоремы 23 п° 8, будет

$$C(\tilde{L}) = C\left(P^2 + \frac{\beta}{3} I\right).$$

Пусть, например, требуется исследовать характер спектра оператора $\tilde{L}_\alpha$, порождаемого в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ операцией $-\frac{d}{dx}(1+x)^\alpha \frac{dy}{dx}$, так что $\rho(x) = (1+x)^{\alpha/4}$.

При $\alpha \leq 2$ будет $\frac{1}{\rho} \in \mathcal{L}_2(0, \infty)$, так что $P = P^*$ и, согласно указанному выше, множество $S(P)$ покрывает всю λ -ось. Так как, к тому же, имеет место предельное соотношение (108), то

$$C(\tilde{L}_\alpha) = \begin{cases} [0, \infty) & \text{при } \alpha < 2, \\ \left[\frac{1}{4}, \infty\right) & \text{при } \alpha = 2. \end{cases}$$

При $\alpha > 2$ выполняется условие (107), так что спектр оператора $\tilde{L}_\alpha$ полуограничен снизу и дискретен.

С помощью замены независимой переменной

$$\xi = \int_0^x \frac{dx}{p(x)}$$

спектральная задача для операции $\mu[y]$ переходит в спектральную задачу для полярной операции вида (29). На этом пути вопрос о критерии дискретности спектра оператора $\tilde{L}$ при $n = 1$ сводится к такому же вопросу для полярной операции (29) на конечном интервале, а для этой операции М. Ш. Бирманом в [13 (8)] получен критерий, аналогичный соотношению (31). Применительно к операции $\mu[y]$ этот критерий выразится соотношением

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \int_x^\infty \frac{dx}{p(x)} = 0.$$

При $n > 1$ переход к полярной операции невозможен и возникает вопрос о прямом выводе условия дискретности спектра. Этот вопрос изучался В. А. Ткаченко, который показал, что для дискретности спектра оператора $\tilde{L}$ в общем случае (105) достаточно выполнения предельного соотношения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{2n-1} \int_x^\infty \frac{dx}{p(x)} = 0. \quad (109)$$

Доказательство В. А. Ткаченко сводится к следующему. Сначала для любой финитной функции $y \in \mathfrak{D}_L$ устанавливаются два неравенства:

$$\int_0^\infty \frac{|y^{(n-1)}y^{(n)}| dx}{\int_x^\infty \frac{dt}{p(t)}} \leq 2 \int_0^\infty p y^{(n)2} dx$$

и

$$\int_0^\infty y^2 dx \leq C \int_0^\infty |y^{(n-1)}y^{(n)}| x^{2n-1} dx,$$

где постоянная C зависит лишь от n .

Первое из этих неравенств достаточно, очевидно, установить для $n=1$. При этом оно следует из неравенства Коши — Буняковского

$$\int_0^\infty \frac{|yy'| dx}{\int_x^\infty \frac{dt}{p(t)}} \leq \left\{ \int_0^\infty \frac{y^2 dx}{p(x) \left[\int_x^\infty \frac{dt}{p(t)} \right]^2} \right\}^{1/2} \left\{ \int_0^\infty p y'^2 dx \right\}^{1/2}$$

и соотношения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{y^2 dx}{p(x) \left[\int_x^\infty \frac{dt}{p(t)} \right]^2} &= \left| \int_0^\infty \frac{dx}{p(x) \left[\int_x^\infty \frac{dt}{p(t)} \right]^2} \int_x^\infty yy' ds \right| = \\ &= \left| \int_0^\infty yy' ds \int_0^s \frac{dx}{p(x) \left[\int_x^\infty \frac{dt}{p(t)} \right]^2} \right| = \\ &= \left| \int_0^\infty yy' \left[\frac{1}{\int_s^\infty \frac{dt}{p(t)}} - \frac{1}{\int_0^\infty \frac{dt}{p(t)}} \right] ds \right| \leq \int_0^\infty \frac{|yy'| ds}{\int_s^\infty \frac{dt}{p(t)}}. \end{aligned}$$

Для доказательства второго неравенства полагаем в (9) $\alpha = 2k - 2$ и заменяем там y на $y^{(k-1)}$. Таким образом,

получаем рекуррентное соотношение

$$\int_0^{\infty} x^{2k-2} [y^{(k-1)}]^2 dx \leq \frac{4}{(2k-1)^2} \int_0^{\infty} x^{2k} [y^{(k)}]^2 dx,$$

из которого следует неравенство

$$\int_0^{\infty} y^2 dx \leq \frac{4^{n-1}}{\prod_{k=0}^{n-1} (2k-1)^2} \int_0^{\infty} x^{2n-2} [y^{(n-1)}]^2 dx$$

или

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} y^2 dx &\leq \frac{2 \cdot 4^{n-1}}{\prod_{k=0}^{n-1} (2k-1)^2} \int_0^{\infty} x^{2n-2} dx \int_x^{\infty} y^{(n-1)} y^{(n)} dt \leq \\ &\leq \frac{2 \cdot 4^{n-1}}{\prod_{k=0}^{n-1} (2k-1)^2} \int_0^{\infty} |y^{(n-1)} y^{(n)}| \frac{x^{2n-1} dx}{2n-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Теперь, предполагая выполненным условие (109), по заданному $\varepsilon > 0$ найдем число N такое, что при $x \geq N$ будет

$x^{2n-1} \int_x^{\infty} \frac{dt}{p(t)} < \frac{\varepsilon}{2C}$. Тогда с помощью установленных неравенств получаем соотношение

$$\begin{aligned} \int_N^{\infty} y^2 dx &\leq C \int_N^{\infty} \frac{|y^{(n-1)}| |y^{(n)}| x^{2n-1} \int_x^{\infty} \frac{dt}{p(t)}}{\int_x^{\infty} \frac{dt}{p(t)}} \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_N^{\infty} \frac{|y^{(n-1)} y^{(n)}| dx}{\int_x^{\infty} \frac{dt}{p(t)}} \leq \varepsilon \int_N^{\infty} p |y^{(n)}|^2 dx, \end{aligned}$$

из которого в силу принципа расщепления следует дискретность спектра оператора $\tilde{L}$.

Если функция $p(x)$ монотонна, то соотношение (109) необходимо для дискретности спектра, но в общем случае вопрос о необходимости условия (109) при $n > 1$ остается открытым.

35. О спектре оператора Шредингера с комплекснозначной потенциальной энергией. В настоящем пункте приводятся несколько примеров применения метода расщепления к дифференциальной операции

$$-y'' + q(x)y \quad (-\infty < x < \infty) \quad (110)$$

с комплекснозначным потенциалом. Эта операция порождает в $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ некоторый J -симметрический оператор L с минимальной областью определения. Его J -самосопряженные расширения обозначим через $\tilde{L}$.

При обобщении некоторых из установленных ранее предложений на случай комплекснозначного потенциала ограничимся неинтегральными признаками.

Обозначим через Q_N выпуклую оболочку значений функции $q(x)$ при $|x| \geq N$, а через Q_N^+ — множество точек λ -плоскости, образованное из Q_N присоединением к каждой точке $z \in Q_N$ полупрямой $z + t$ ($0 < t < \infty$). Построенное множество Q_N^+ , очевидно, также выпукло. Оно содержит все значения функционала

$$(Ly, y) = \int_{|x| \geq N} |y'|^2 dx + \int_{|x| \geq N} q(x) |y|^2 dx \quad (111)$$

при $y \in \mathfrak{D}_L$, $\|y\| = 1$, так как второе слагаемое в (111) принадлежит Q_N , а первое положительно. Если обозначить через L_N ортогональную сумму минимальных операторов, определяемых операцией (110) в $\mathcal{L}_2(-\infty, 0)$ и $\mathcal{L}_2(0, \infty)$, то, возвращаясь к обозначениям п° 21, можно записать отмеченное выше включение в виде

$$K(L_N) \subset Q_N^+. \quad (112)$$

Обозначим, далее, через Q_∞ пересечение всех Q_N , а через Q_∞^+ — пересечение всех Q_N^+ при $N \rightarrow \infty$. Предельное множество Q_∞^+ не всегда получается из Q_∞ присоединением

к Q_∞ полупрямых $z + t$ ($z \in Q_\infty$). Так, например, при вещественном потенциале, стремящемся к $-\infty$, будет, очевидно, $Q_\infty = 0$, в то время как множество Q_∞^+ совпадает с вещественной λ -осью.

Отметим, что множество Q_∞^+ , как пересечение множеств Q_N^+ , является выпуклым и замкнутым. Поэтому дополнение R_∞ множества Q_∞^+ до всей λ -полуплоскости либо пусто, либо является открытым множеством, состоящим не более чем из двух связных компонент.

Ниже существенно используются общие теоремы о линейных уравнениях в нормированных пространствах, уже упомянутые ранее, в § 4 главы I. Из этих общих теорем вытекает, в частности, следующая

Теорема 29. *В дополнении R_∞ множества Q_∞^+ до всей λ -плоскости спектр оператора $\tilde{L}$ обладает следующими свойствами:*

1) *в R_∞ нет других точек спектра оператора $\tilde{L}$, кроме его собственных значений;*

2) *либо множество $S(\tilde{L})$ не имеет конечных предельных точек внутри R_∞ , либо каждая точка по крайней мере одной из связных компонент области R_∞ является собственным значением оператора $\tilde{L}$;*

3) *если данная связная компонента области R_∞ не покрыта целиком дискретной частью спектра оператора $\tilde{L}$, то ранг каждого собственного значения оператора $\tilde{L}$, лежащего в этой компоненте, конечен и соответствующее корневое подпространство G_λ отделимо по формуле*

$$\mathcal{L}_2(-\infty, \infty) = G_\lambda \dot{+} F_\lambda, \quad (113)$$

где F_λ есть ортогональное дополнение подпространства JG_λ до всего $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$.

Доказательство исчерпывается ссылкой на теорему 45 п° 23, если предварительно установить конечность характеристики оператора $\tilde{L}$ и замкнутость многообразия $(\tilde{L} - \lambda I) \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ при $\lambda \in R_\infty$. Но конечность характеристики очевидна, а замкнутость многообразия $(\tilde{L} - \lambda I) \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ легко устанавливается следующим образом.

Пусть $\lambda \in R_\infty$, то есть $\lambda \in Q_\infty^+$. Тогда при некотором N будет $\lambda \in Q_N^+$, откуда в силу (112) заключаем, что

$$\lambda \in K(L_N). \quad (114)$$

Но в силу теоремы 42 п° 21 из соотношения (114) следует принадлежность точки λ полю регулярности $\Pi(L_N)$, а из принципа расщепления для конечномерных расширений следует, что $C(\tilde{L}) = C(L_N)$.

Таким образом, $\lambda \in \Pi(L_N)$, а

$$C(\tilde{L}) \cap \Pi(L_N) = C(L_N) \cap \Pi(L_N) = 0,$$

так что $\lambda \in C(\tilde{L})$, откуда вытекает замкнутость многообразия $(\tilde{L} - \lambda I) \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$. Теорема доказана.

Следующее предложение дает достаточный признак дискретности спектра оператора $\tilde{L}$.

Теорема 30. *Если при достаточно больших $|x|$ значения потенциала $q(x)$ лежат внутри некоторого угла*

$$\alpha < \arg q(x) < \alpha + \pi - \delta \quad (\delta > 0), \quad (115)$$

не содержащего отрицательной полуоси, и

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |q(x)| = \infty, \quad (116)$$

то спектр оператора $\tilde{L}$ дискретен. При этом, если оставить в стороне исключительные расширения, когда вся λ -плоскость покрыта собственными значениями оператора $\tilde{L}$, спектр $S(\tilde{L})$ не имеет конечных предельных точек, ранг каждого собственного значения конечен и соответствующие корневые подпространства отделяются по формуле (113).

Исключительный случай не может иметь места, если вещественная часть потенциала ограничена снизу.

Доказательство. Справедливость всех утверждений, кроме последнего, непосредственно следует из предыдущей теоремы, так как при выполнении условий (115) и (116) множество Q_∞^+ пусто. Последнее утверждение следует из теоремы 46 п° 24, в силу которой оператор L является J -самосопряженным. Поскольку в силу условия (115) множество $K(L)$ не заполняет всю плоскость, то тем более не будет покрывать всю λ -плоскость спектр $S(L) \subset K(L)$.

Для вещественных потенциалов случаи, когда $q(x) \rightarrow +\infty$ и $q(x) \rightarrow -\infty$, существенно различны: в первом случае спектр ограничен снизу и дискретен (теорема 5), а во втором случае он может покрывать всю λ -ось (теорема 28). Доказанная выше теорема 30 показывает, что второй случай является исключительным в том смысле, что если предельное соотношение (116) имеет место при постоянном $\arg q(x) = \alpha$, то для любого α , кроме, быть может, $\alpha = \pi$, спектр оператора $\tilde{L}$ будет дискретным.

Из теоремы 30 следует, в частности, признак дискретности, установленный ранее иными методами в [63(1)] и выражаемый предельными соотношениями

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \operatorname{Re} q(x) = +\infty \text{ либо } \lim_{|x| \rightarrow \infty} \operatorname{Im} q(x) = +\infty \text{ (или } -\infty).$$

Теорема 31. Если минимальный дифференциальный оператор L_1 , определяемый операцией

$$-y'' + y \operatorname{Re} q(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

является самосопряженным и

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \operatorname{Im} q(x) = 0, \quad (117)$$

то оператор L является J -самосопряженным и его спектр обладает следующими свойствами:

- 1) $C(L) = C(L_1)$,
- 2) вне $C(L_1)$ спектр оператора L не имеет конечных предельных точек,
- 3) каждое собственное значение оператора L , не принадлежащее $C(L_1)$, имеет конечный ранг и соответствующее корневое подпространство отделимо по формуле (113).

Доказательство. J -самосопряженность оператора L следует из ограниченности мнимой части потенциала, а утверждение 1) следует непосредственно из очевидного обобщения теоремы 23 п° 8 о малых возмущениях на комплекснозначные потенциалы (см. п° 24).

Далее, из условия (117) следует, что множество Q_∞^+ лежит на вещественной λ -оси, а поэтому каждая из полуплоскостей $\operatorname{Im} \lambda > 0$ и $\operatorname{Im} \lambda < 0$ принадлежит связной компоненте дополнения R_∞ множества Q_∞^+ . Но тогда, в силу теоремы 30, при наличии хотя бы одной невещественной

конечной предельной точки спектра $S(L)$ соответствующая полуплоскость должна была бы целиком принадлежать дискретной части спектра оператора L , что невозможно, так как вне полосы

$$\inf \operatorname{Im} q(x) \leq \operatorname{Im} \lambda \leq \sup \operatorname{Im} q(x)$$

оператор L , очевидно, не может иметь собственных значений.

Таким образом, утверждение 2) также доказано, а тогда последнее утверждение 3) непосредственно следует из теоремы 29.

Из теоремы 31 вытекает следующее предложение, являющееся обобщением теорем 1 и 18 на случай комплекснозначных потенциалов.

Теорема 32. *Если*

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x) = 0,$$

то оператор L является J -самосопряженным, его непрерывный спектр $S(L)$ совпадает с полuosью $\lambda \geq 0$, вне которой спектр $S(L)$ исчерпывается изолированными собственными значениями конечного ранга и соответствующие им корневые подпространства отделимы по формуле (113).

Теоремы 31 и 32, по существу, были ранее иными методами установлены В. Б. Лидским [63(2)]. Ему же принадлежит обобщение на комплекснозначные потенциалы признака дискретности А. М. Молчанова (см. п° 59).

36. Спектр двучленных дифференциальных операторов над вектор-функциями. Большинство результатов п° п° 27—32 легко переносятся на операторы $\tilde{L}$, порождаемые в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ векторной операцией

$$l[y] = (-1)^n y^{(2n)} + Q(x)y \quad (0 \leq x < \infty), \quad (118)$$

где $Q(x) = (q_{jk}(x))$ есть эрмитова матрица m -го порядка и

$$y(x) = \{y_k(x)\}_{k=1}^m \quad (m < \infty).$$

Однако фактическое проведение соответствующих доказательств нецелесообразно, так как оно свелось бы к повторению соответствующих выкладок п° п° 27—32.

Ограничиваясь лишь указаниями о необходимых изменениях в формулировках теорем при переходе от скалярной

операции (1) к векторной операции (118), обозначим через $\mu(x)$ и $\nu(x)$ наименьшее и соответственно наибольшее собственное значение матрицы $Q(x)$.

Соответствующий операции (118) квадратичный функционал имеет вид

$$\Phi[y] = \int_0^\infty \sum_{k=1}^m |y_k^{(n)}|^2 dx + \int_0^\infty \sum_{j,k=1}^m q_{jk} y_j \bar{y}_k dx$$

и допускает двустороннюю оценку

$$\begin{aligned} \|y^{(n)}\|^2 + \int_0^\infty \mu(x) \sum_{k=1}^m |y_k(x)|^2 dx &\leq \Phi[y] \leq \\ &\leq \|y^{(n)}\|^2 + \int_0^\infty \nu(x) \sum_{k=1}^m |y_k(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

При обобщении на векторную операцию (118) установленных ранее признаков полуограниченности снизу и дискретности отрицательной части или всего спектра, а также признаков неосцилляторности (теоремы 1, 2, 5, 8, 9, 10) следует заменить $q(x)$ на $\mu(x)$. При обобщении признаков осцилляторности (теоремы 9, 11—14) следует заменить $q(x)$ на $\nu(x)$. Отметим, что хотя теперь левые части неравенств (39) и (40) в формулировке обобщенной теоремы Кнезера будут различны, точность соответствующего признака при переходе к векторной операции не уменьшается. Иными словами, в терминах собственных значений матрицы $Q(x)$ признаки, определяемые теоремой 9, не могут быть существенно улучшены, так как при $\mu(x) < -(\alpha_n^2 + \delta)x^{-2n}$ или $\nu(x) \geq -\alpha_n^2 x^{-2n}$ операция (118) может оказаться как неосцилляторной, так и осцилляторной.

При перенесении на векторный случай теорем, относящихся к положительной части непрерывного спектра (теоремы 17—22), надо заменить $\liminf q(x)$, $\limsup q(x)$ и $|q(x)|$ на $\liminf \mu(x)$, $\limsup \nu(x)$ и эвклидову норму $\|Q(x)\|$ матрицы $Q(x)$ соответственно.

Формулировка спектральных альтернатив п° 32 остается при $n = 1$ без изменений.

Значительных изменений требует формулировка теоремы 28, относящейся к случаю, когда спектр покрывает всю λ -ось. Эти изменения связаны с тем, что в отличие от

скалярного случая наименьшее собственное значение матрицы $Q''(x)$ не только не совпадает, но и никак не связано с $v''(x)$. Вопросы перенесения на случай операции (118) теорем, содержащих необходимые и достаточные условия того или иного расположения частей спектра, остаются открытыми.

37. Дискретный аналог осцилляционных теорем. Согласно теореме 32 п° 14 для осцилляционности решений конечноразностного уравнения

$$-\alpha_k y_{k-1} - \alpha_{k+1} y_{k+1} + \beta_k y_k = \lambda y_k \quad (119)$$

$$(\alpha_k > 0, \quad k = 0, 1, \dots)$$

при $\lambda = \lambda_0$ необходимо и достаточно, чтобы часть спектра якобиевой матрицы

$$t = \begin{pmatrix} \beta_0 & \alpha_1 & 0 & \cdot \\ \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \cdot \\ 0 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad (120)$$

расположенная левее точки $\lambda = \lambda_0$, была бесконечным множеством. Таким образом, как и в п° 12, исследование осцилляторности уравнения (119) связано с соответствующим квадратичным функционалом

$$\Phi[y] = (t[y], y) - \lambda_0(y, y) \quad (121)$$

на N -финитных векторах (то есть на финитных векторах, первые N координат которых равны нулю).

Предложение, соответствующее теореме 28 п° 10, состоит в том, что если при некотором N для любого N -финитного вектора y будет $\Phi[y] \geq 0$, то левее точки λ_0 имеется лишь конечное множество точек спектра оператора $\tilde{L}$, если же для каждого N существует N -финитный вектор y , для которого $\Phi[y] < 0$, то левее точки λ_0 имеется бесконечное множество точек спектра оператора $\tilde{L}$.

В соответствии с (121) функционал $\Phi[y]$ имеет вид

$$\Phi[y] = \alpha_N |y_N|^2 + \alpha_{N+p} |y_{N+p}|^2 +$$

$$+ \sum_{k=N+1}^{N+p} \alpha_k |y_{k-1} + y_k|^2 + \sum_{k=N}^{N+p} \omega_k |y_k|^2, \quad (122)$$

где

$$\omega_k \equiv -\alpha_k - \alpha_{k+1} + \beta_k - \lambda_0. \quad (123)$$

Двучленной дифференциальной операции (1) соответствует матрица Якоби (120) с $\alpha_k \equiv 1$. Следующее предложение является дискретным аналогом теоремы 13.

Теорема 33. *Если*

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\beta_k - 2) = -\infty,$$

то уравнение

$$-y_{k+1} - y_{k-1} + \beta_k y_k = 0$$

осцилляторно.

Доказательство. Действительно, полагая в (122) при любом заданном N

$$y_k = \begin{cases} 0, & k < N, \\ (-1)^k, & N \leq k \leq N+p, \\ 0, & k > N+p, \end{cases}$$

получаем при достаточно большом натуральном p неравенство

$$\Phi[y] = 2 + \sum_{k=N}^{N+p} (\beta_k - 2) < 0.$$

Приведем теперь дискретный аналог теоремы Кнезера, установленный в [71 (1)]. При этом будем предполагать, что существует конечный положительный предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \alpha_k = \alpha > 0$$

и что при $k \rightarrow \infty$ для некоторого $s > 0$ имеет место асимптотическое равенство

$$\alpha_k - \alpha = Ck^{-s} + O(k^{-s-1}), \quad (124)$$

где C — вещественная постоянная произвольного знака. Соотношение (124), в частности, выполняется при $\alpha_k \equiv 1$ (если положить $C = 0$).

Теорема 34 [71 (1)]. *Если выполнено соотношение (124), то уравнение*

$$-\alpha_k y_{k-1} - \alpha_{k+1} y_{k+1} + \beta_k y_k = 0$$

неосцилляторно при

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} k^2 \omega_k > -\frac{1}{4} \quad (125)$$

и осцилляторно при

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} k^2 \omega_k < -\frac{1}{4}. \quad (126)$$

Доказательство. Пусть выполнены соотношения (124) и (125). Имеем при любых натуральных N , p и вещественных y_k

$$\begin{aligned} \sum_{N+1}^{N+p} \alpha_k \left(y_k + y_{k-1} - \frac{y_k - y_{k-1}}{4k} \right)^2 &= \sum_{N+1}^{N+p} \alpha_k (y_k + y_{k-1})^2 + \\ &+ \frac{1}{16} \sum_{N+1}^{N+p} \alpha_k \frac{(y_k - y_{k-1})^2}{k^2} - \frac{1}{2} \sum_{N+1}^{N+p} \alpha_k \frac{y_k^2 - y_{k-1}^2}{k}. \end{aligned}$$

Отсюда, пользуясь элементарным неравенством

$$2 |y_k y_{k-1}| \leq y_{k-1}^2 + y_k^2,$$

получаем

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{N+1}^{N+p} \alpha_k \left(y_k + y_{k-1} - \frac{y_k - y_{k-1}}{4k} \right)^2 \leq \sum_{N+1}^{N+p} \alpha_k (y_k + y_{k-1})^2 - \\ &- \frac{1}{2} \sum_{N+1}^{N+p} \frac{\alpha_k y_k^2}{k} + \frac{1}{2} \sum_N^{N+p-1} \frac{\alpha_{k+1} y_k^2}{k+1} + \frac{1}{16} \left\{ \sum_{N+1}^{N+p} \alpha_k \frac{y_k^2}{k^2} + \right. \\ &+ \sum_N^{N+p-1} \alpha_{k+1} \frac{y_k^2}{(k+1)^2} + \sum_{N+1}^{N+p} \alpha_k \frac{y_k^2}{k^2} + \sum_{N+1}^{N+p} \alpha_k \frac{y_{k-1}^2}{k^2} \left. \right\} \leq \\ &\leq \sum_{N+1}^{N+p} \alpha_k (y_k + y_{k-1})^2 + \frac{1}{2} \sum_N^{N+p} \left(\frac{\alpha_{k+1}}{k+1} - \frac{\alpha_k}{k} + \right. \\ &+ \frac{\alpha_k}{4k^2} + \frac{\alpha_{k+1}}{4(k+1)^2} \left. \right) y_k^2 + \frac{\alpha_N}{2N} y_N^2 \left(1 - \frac{1}{4N} \right) - \\ &- \frac{\alpha_{N+p+1}}{2(N+p+1)} \left(1 - \frac{1}{4(N+p+1)} \right) y_{N+p}^2. \quad (127) \end{aligned}$$

Имея в виду сравнить правую часть полученного неравенства с (122), установим, используя (125), неравенство

$$\omega_k > \frac{1}{2\alpha} \left\{ \frac{\alpha_k}{4k^2} - \frac{\alpha_k}{k} + \frac{\alpha_{k+1}}{4(k+1)^2} + \frac{\alpha_{k+1}}{k+1} \right\}. \quad (128)$$

При $\alpha_k \equiv \alpha$ неравенство (128) является очевидным следствием условия (125). В общем случае правая часть (128) в силу (124) есть $-\frac{1}{4k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$ и снова неравенство (128) следует из условия (125).

Сравнивая теперь правую часть неравенства (127) с выражением (122) для $\Phi[y]$, получаем в силу (128) при некотором N для любого N -финитного вещественного вектора требуемое соотношение $\Phi[y] \geq 0$.

Переходя к доказательству второй части теоремы, предположим выполненным условие (126) и определим пробный вектор y равенствами

$$y_k = \begin{cases} 0 & (0 \leq k \leq N_1), \\ (-1)^k \frac{(k - N_1) \sqrt{N_2}}{N_2 - N_1} & (N_1 \leq k \leq N_2), \\ (-1)^k \sqrt{k} & (N_2 \leq k \leq N_3), \\ (-1)^k \frac{\sqrt{N_3} (N_4 - k)}{(N_4 - N_3)} & (N_3 \leq k \leq N_4), \\ 0 & (k \geq N_4). \end{cases} \quad (129)$$

Для построенного вектора y будет

$$\begin{aligned} \Phi[y] = & \frac{N_2}{(N_2 - N_1)^2} \sum_{N_1+1}^{N_2} \{\alpha_k + \alpha \omega_k (k - N_1)^2\} + \\ & + \sum_{N_2+1}^{N_3} \{\alpha_k (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2 + \alpha k \omega_k\} + \\ & + \frac{N_3}{(N_4 - N_3)^2} \sum_{N_3+1}^{N_4} \{\alpha_k + (N_4 - k)^2 \omega_k\}. \end{aligned} \quad (130)$$

Обозначая слагаемые в правой части последнего соотношения через S_1 , S_2 и S_3 соответственно, имеем для S_1 и S_3 неравенства

$$S_1 < \frac{N_2}{(N_2 - N_1)^2} \sum_{N_1+1}^{N_2} \alpha_k,$$

$$S_3 < \frac{N_3}{(N_4 - N_3)^2} \sum_{N_3+1}^{N_4} \alpha_k.$$

При достаточно большом N_1 можно считать $\alpha_k < 2\alpha$, так что будет

$$S_1 < \frac{2\alpha N_2}{(N_2 - N_1)}, \quad S_3 < \frac{2\alpha N_3}{(N_4 - N_3)}$$

или, если выбрать числа N_j по закону геометрической прогрессии $N_{j+1} = N_j \cdot r$ ($j = 1, 2, 3$; $r > 1$),

$$S_1 < \frac{2\alpha r}{r-1}, \quad S_3 < \frac{2\alpha}{r-1}. \quad (131)$$

Теперь, полагая $\alpha_k = \alpha + \varepsilon_k$ и пользуясь неравенством (126), получаем для S_2 при любом $\varepsilon > 0$ оценку

$$S_2 < \sum_{N_2+1}^{N_3} \left\{ \alpha (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2 - \alpha \frac{1+\varepsilon}{4k} + \varepsilon_k (\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2 \right\}$$

или, заменяя $(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2$ разложением

$$(\sqrt{k} - \sqrt{k-1})^2 = \frac{1}{4k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

оценку

$$S_2 < \sum_{N_2+1}^{N_3} \left\{ \alpha \left[O\left(\frac{1}{k^2}\right) - \frac{\varepsilon}{4k} \right] + \frac{\varepsilon_k}{4k} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\},$$

так что при больших r будет

$$S_2 < -\frac{\alpha\varepsilon}{8} \ln r. \quad (132)$$

Теперь из (130), (131), (132) следует требуемое неравенство

$$\Phi[y] < 0,$$

и теорема доказана.

ГЛАВА III

СПЕКТР ОДНОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ОБЩЕГО ВИДА

38. Одномерные дифференциальные операции общего вида. В этой главе рассматриваются некоторые вопросы о спектре самосопряженных операторов $\tilde{L}$, порождаемых в смысле п° 7 операциями

$$l = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} p_k(x) \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} \quad (1)$$

в пространстве $\mathcal{L}_2(0, \infty)$. Условия, которым подчинены коэффициенты этой операции, указаны в п° 7. Всегда предполагается, что $p_0(x) > 0$, а в большинстве дальнейших теорем принимается $p_0(x) \equiv 1$. В частном случае, когда $p_0(x) \equiv 1$, $p_k(x) = 0$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), операция (1) сводится к двучленной, рассматривавшейся в предыдущей главе. Приводимые ниже признаки того или иного расположения частей спектра являются обобщением различных признаков главы II. Однако по сравнению с предыдущей главой, результаты относительно спектра операторов, порождаемых операцией (1), носят менее законченный характер. В частности, в настоящей главе не рассматриваются необходимые признаки, получение которых существенно труднее, чем это было в предыдущей главе, когда дифференциальная операция определялась лишь одним функциональным параметром — потенциалом $q(x)$. Ряд результатов относительно спектра многочленного дифференциального оператора, полученных асимптотическими методами, можно найти в монографии И. М. Рапопорта [82 (2)], а также в книге М. А. Наймарка [72 (3)].

39. Признаки полуограниченности спектра. Следующие два предложения являются обобщением теорем 1 и 2, установленных в п° 27 для двучленных операций.

Теорема 1. Если все коэффициенты $p_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots, n$) ограничены снизу и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \inf p_k(x) = a_k \quad (k = 0, 1, \dots, n),$$

то левее точки

$$\mu = \min_{0 \leq \lambda < \infty} Q(\lambda),$$

где

$$Q(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^{n-k},$$

спектр оператора $\tilde{L}$ исчерпывается изолированным множеством собственных значений с единственной возможной предельной точкой $\lambda = \mu$.

Доказательство. Выберем точку расщепления $\gamma = \gamma_\varepsilon$ так, чтобы при $x > \gamma$ было $p_k(x) > a_k - \varepsilon$ ($k = 0, 1, \dots, n$).

Если соответствующее расщепление оператора $\tilde{L}$ определено соотношениями

$$\tilde{L} = \tilde{L}_0, \quad L_0 = L_1 \oplus L_\gamma,$$

то

$$C(\tilde{L}) = C(L_\gamma).$$

Но для оператора L_γ при $y \in \mathfrak{D}_{L_\gamma}$ будет

$$\begin{aligned} (L_\gamma y, y) &= \int_{\gamma}^{\infty} \sum_{k=0}^n p_k(x) |y^{(n-k)}(x)|^2 dx \geq \\ &\geq \int_{\gamma}^{\infty} \sum_{k=0}^n (a_k - \varepsilon) |y^{(n-k)}(x)|^2 dx = \\ &= \left(Q_\varepsilon \left[-\frac{d^2}{dx^2} \right] y, y \right) \geq \mu_\varepsilon(y, y), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$Q_\varepsilon(\lambda) = \sum_{k=0}^n (a_k - \varepsilon) \lambda^{n-k}$$

и

$$\mu_\varepsilon = \min_{0 \leq \lambda < \infty} Q_\varepsilon(\lambda),$$

Из неравенства (2) следует полуограниченность оператора L_γ , откуда вытекает полуограниченность оператора $\tilde{L}$. Далее, из того же неравенства (2) следует, что $C(L_\gamma) \cap \cap(-\infty, \mu_\epsilon) = \emptyset$, а поэтому и $C(\tilde{L}) \cap \cap(-\infty, \mu_\epsilon) = \emptyset$. Переходя в последнем соотношении к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, получаем

$$C(\tilde{L}) \cap \cap(-\infty, \mu) = \emptyset,$$

что и требовалось доказать.

Из приведенного доказательства следует, что если при условиях теоремы 1 будет $a_n = \infty$, то спектр $S(\tilde{L})$ оператора $\tilde{L}$ дискретен.

В формулировке следующей теоремы, как и ранее в п° 25, звездочкой обозначается отрицательная часть функции.

Теорема 2 [31 (9)]. Если $p_0(x) \equiv 1$ и при любом $\delta > 0$ выполнены неравенства

$$\int_{M_{k,\delta}} |p_k^*(x)| dx < \infty \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (3)$$

где $M_{k,\delta}$ есть множество значений x , для которых $|p_k^*(x)| \leq \delta$, то отрицательная часть спектра оператора $\tilde{L}$ дискретна и ограничена.

Доказательство. Введем для любого k ($k = 1, 2, \dots, n$) квадратичный функционал

$$\begin{aligned} \Phi^{(k)}[y] = \int_0^\infty |y^{(n)}| dx + 2n \int_0^\infty p_k^*(x) |y^{(n-k)}|^2 dx + \\ + 2n\eta \int_0^\infty |y^{(n-k)}|^2 dx, \end{aligned} \quad (4)$$

который при подстановке $y^{(n-k)}(x) = z(x)$ переходит в функционал вида (12) п° 27. Как было установлено в п° 27 при доказательстве теоремы 2, из условий (3) следует, что для любой системы значений $\eta_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) найдется число N такое, что функционалы $\Phi^{(k)}[y]$ будут неотрицательными на всех N -финитных функциях из $\mathfrak{D}_{\tilde{L}}$.

Представим соответствующий операции (1) квадратичный функционал

$$\Phi_{\varepsilon}[y] = \int_0^{\infty} \sum_{k=0}^n p_k(x) |y^{(n-k)}(x)|^2 dx + \varepsilon \int_0^{\infty} |y(x)|^2 dx$$

в виде

$$\Phi_{\varepsilon}[y] = \int_0^{\infty} \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} |y^{(n)}|^2 + p_k |y^{(n-k)}|^2 + \right. \\ \left. + \varepsilon_k |y^{(n-k)}|^2 - \varepsilon_{k-1} |y^{(n-k+1)}|^2 \right\} dx,$$

где $\varepsilon_0 = 0$ и $\varepsilon_n = \varepsilon_1$.

В силу неравенства (3) п° 26 имеем

$$\Phi_{\varepsilon}[y] \geq \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \int_0^{\infty} |y^{(n)}|^2 dx + \int_0^{\infty} p_k^* |y^{(n-k)}|^2 dx + \right. \\ \left. + \varepsilon_k \int_0^{\infty} |y^{(n-k)}|^2 dx - \varepsilon_{k-1} \|y\|^{\frac{k-1}{n}} \|y^{(n)}\|^{\frac{n-k+1}{n}} \right\}. \quad (5)$$

Зафиксируем малые положительные числа ε_k ($k = 1, 2, \dots, n$) так, чтобы величина $\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1})$ также была положительной и выберем, как и при доказательстве теоремы 2 п° 27, число N так, чтобы все функционалы (4) были неотрицательны на N -финитных функциях $y \in \mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ при $\eta_k = \varepsilon_k$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) и $\eta_n = \varepsilon - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_{n-1})$.

Если теперь y есть нормированная N -финитная функция из $\mathfrak{D}_{\tilde{L}}$, то неравенство (5) принимает вид

$$\Phi_{\varepsilon}[y] \geq \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{n} \int_N^{\infty} |y^{(n)}|^2 dx + \int_N^{\infty} p_k^* |y^{(n-k)}|^2 dx + \right. \\ \left. + \varepsilon_k \int_N^{\infty} |y^{(n-k)}|^2 dx - \varepsilon_{k-1} \|y^{(n)}\|^{\frac{n-k+1}{n}} \right\}. \quad (6)$$

Рассмотрим отдельно два случая, когда для данной функции $y(x)$ будет $\|y^{(n)}\| > 1$ и когда для нее $\|y^{(n)}\| \leq 1$.

В первом случае, заменяя $\|y^{(n)}\|^{\frac{n-k+1}{n}}$ на $\|y^{(n)}\|^2$ и считая $\varepsilon_k < \frac{1}{2n}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$), получаем из неравенства (6) соотношение

$$\Phi_\varepsilon[y] \geq \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{1}{2n} \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx + \int_N^\infty p_k^* |y^{(n-k)}|^2 dx + \right. \\ \left. + \varepsilon_k \int_N^\infty |y^{(n-k)}|^2 dx \right\} = \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \Phi^{(k)}[y] > 0.$$

Во втором случае, заменяя величину $\|y^{(n)}\|^{\frac{n-k+1}{n}}$ единицей, получаем

$$\Phi_\varepsilon[y] \geq \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{n} \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx + \int_N^\infty p_k^* |y^{(n-k)}|^2 dx + \right. \\ \left. + \varepsilon_k \int_N^\infty |y^{(n-k)}|^2 dx \right\} + \frac{1}{n} \int_N^\infty |y^{(n)}|^2 dx + \int_N^\infty p_n |y|^2 dx + \\ + \left(\varepsilon - \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k \right) \int_N^\infty |y|^2 dx \geq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^n \Phi^{(k)}[y] \geq 0.$$

Таким образом, в обоих случаях имеем $\Phi[y] \geq 0$, и теорема доказана.

Из теоремы 2, в частности, вытекает признак И. М. Раппорта [82(2)] ограниченности снизу оператора $\tilde{L}$, выражаемый соотношениями

$$\int_0^\infty |p_k(x)| dx < \infty \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

40. Области неосцилляторности и осцилляторности. Рассмотрим в качестве отправного пункта дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$Q\left[-\frac{d^2}{dx^2}\right]u = 0, \quad (7)$$

где

$$Q(\lambda) = \sum_{k=0}^n a_k \lambda^{n-k} \quad (a_0 = 1). \quad (8)$$

Так как спектр соответствующего оператора с точностью до конечного числа собственных значений совпадает с полуосью $\lambda \geq \mu$, где

$$\mu = \min_{0 \leq \lambda < \infty} Q(\lambda),$$

то уравнение (7) будет неосцилляторным при $\mu \geq 0$ и осцилляторным при $\mu < 0$.

Неравенство $\mu > 0$ равносильно отсутствию у многочлена $Q(\lambda^2)$ вещественных корней.

Обозначим через $\mathfrak{R}_a$ множество точек $M(a_1, a_2, \dots, a_n)$ в n -мерном пространстве коэффициентов многочлена (8), которым соответствуют неотрицательные многочлены $Q(\lambda^2)$. Очевидно, $\mathfrak{R}_a$ есть замкнутая выпуклая часть n -мерного пространства, содержащая «первый октант» a -системы координат.

Множество $\mathfrak{R}_a$ можно описать аналитически, если воспользоваться теоремой Эрмита, согласно которой отсутствие вещественных корней у алгебраического многочлена равносильно равенству нулю сигнатуры квадратичной формы $\sum_{j,k=0}^n S_{j+k} \xi_j \xi_k$, где S_{j+k} есть ньютонова сумма порядка $j+k$. Таким образом, множество $\mathfrak{R}_a$ есть замыкание множества точек $M(a_1, a_2, \dots, a_n)$, для которых в последовательности $2n$ первых главных миноров ганкелевой матрицы $(S_{j+k})_{j,k=0}^n$ имеется точно n знакоперемен. При этом ньютоновы суммы вычисляются последовательно с помощью известных рекуррентных соотношений

$$k\alpha_k = s_1\alpha_{k-1} + s_2\alpha_{k-2} + \dots + (-1)^{k-1}s_k,$$

где

$$\alpha_{2k} = a_k, \quad \alpha_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n).$$

С помощью уже применявшейся замены переменных (42) $n^\circ 30$ функционал $\Phi[u]$, соответствующий уравнению (7) с постоянными коэффициентами, приводится к виду

$$\tilde{\Phi}_0[y] = \int_0^\infty |y^{(n)}|^2 dx + \sum_{k=1}^\infty \int_0^\infty b_k x^{-2k} |y^{(n-k)}|^2 dx,$$

где коэффициенты b_k получаются из a_k с помощью треугольного линейного преобразования

$$b_k = \Lambda(a_1, a_2, \dots, a_k) \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (9)$$

При этом линейном преобразовании выпуклое замкнутое множество $\mathbb{R}_a$ переходит в некоторое выпуклое замкнутое множество $\mathbb{R}_b$ в пространстве коэффициентов b_k ($k = 1, 2, \dots, n$). Теперь общие предложения н° 12 приводят к следующему обобщению классической теоремы Кнезера на дифференциальную операцию (1).

Теорема 3 [31 (9)]. Пусть выпуклое замкнутое множество $\mathbb{R}_b$ есть образ замкнутого выпуклого множества $\mathbb{R}_a$, определяемый преобразованием (9), и пусть при $k = 1, 2, \dots, n$

$$\hat{b}_k = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup x^{2k} p_k(x), \quad \check{b}_k = \lim_{x \rightarrow \infty} \inf x^{2k} p_k(x).$$

Если точка $M(\check{b}_1, \check{b}_2, \dots, \check{b}_n)$ принадлежит $\mathbb{R}_b$, то уравнение

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{d^{n-k}}{dx^{n-k}} p_k(x) \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} = 0 \quad (10)$$

неосцилляторно. Если точка $M(\hat{b}_1, \hat{b}_2, \dots, \hat{b}_n)$ не принадлежит $\mathbb{R}_b$, то это уравнение осцилляторно.

В частности, при $n = 1$ множество $\mathbb{R}_b$ есть полусось $b_1 \geq -\frac{1}{4}$, при $n = 2$ множество $\mathbb{R}_b$ определяется неравенствами $b_2 \geq -\frac{9}{4} b_1 - \frac{9}{16}$ (при $b_1 \geq -\frac{5}{2}$) и $b_2 \geq \frac{1}{4} (2 - b_1)^2$ (при $b_1 \leq -\frac{5}{2}$). Таким образом, для дифференциального уравнения четвертого порядка множество $\mathbb{R}_b$ есть часть плоскости, ограниченная дугой параболы и касающейся ее полупрямой (см. также [76]). При $n = 3$ множество $\mathbb{R}_b$ есть выпуклая часть трехмерного пространства, содержащая первый октант b -системы координат. Простые вычисления приводят к следующим параметрическим уравнениям границы тела $\mathbb{R}_b$ в этом случае:

$$b_1 = \frac{35}{4} + (u - 2v), \quad b_2 = \frac{259}{16} + 13(u - 2v) + (v^2 - 2uv),$$

$$b_3 = \frac{225}{64} + \frac{225}{16}(u - 2v) + \frac{25}{4}(v^2 - 2uv) + uv^2.$$

Отметим, что во всех случаях последний из отрезков, отсекаемых телом $\mathfrak{R}_b$ на осях b -системы координат, совпадает с ранее найденной величиной α_n (см. п° 30).

В классическом случае $n = 1$ неосцилляторность уравнения

$$-y'' + q(x)y = 0, \quad (11)$$

как известно, эквивалентна существованию решения соответствующего уравнения Риккати

$$u' - u^2 - q(x) = 0 \quad (12)$$

на некоторой полуоси $x \geq a$. Этот факт непосредственно следует из вида преобразования

$$u = y'y^{-1},$$

переводящего (11) в (12).

В общем случае неосцилляторность уравнения (10) также эквивалентна разрешимости некоторой нелинейной системы дифференциальных уравнений на полуоси $x \geq a$. Для получения этой системы достаточно воспользоваться теоремой 31 п° 12 и одной теоремой М. Г. Крейна (см., далее, п° 44), в силу которой неосцилляторная дифференциальная операция (1) допускает мультипликативное представление

$$l[y] = \mu^* p_0 \mu[y] \quad (0 < x < \infty), \quad (13)$$

где

$$\mu[y] = y^{(n)} + u_1(x)y^{(n-1)} + \dots + u_n(x)y$$

есть операция с коэффициентами $q(x) \in C_n(0, \infty)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а $\mu^*[y]$ — сопряженная ей по Лагранжу операция.

Приравнявая коэффициенты при производных $y^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, 2n - 1$) в обеих частях равенства (13), получим искомую систему дифференциальных уравнений относительно функций $u_j(x)$ ($j = 1, 2, \dots, n$), которая при $n = 1$ сводится к одному уравнению Риккати (12).

Для неосцилляторности уравнения (10) необходимо и достаточно, чтобы построенная нелинейная система дифференциальных уравнений при некотором a имела решение на полуоси $x \geq a$.

41. О лакунах в непрерывной части спектра. Как было показано в п° 31, лакуны в непрерывной части спектра для двучленных операций при $\lambda \rightarrow \infty$ не превосходят колебания потенциала в бесконечности. В этом пункте будет установлено,

что при выполнении некоторых условий и в случае общей операции (1) лакуны в непрерывной части спектра не могут слишком быстро расти вместе с λ .

Теорема 4 [31 (9)]. Если $p_0(x) \equiv 1$, а остальные коэффициенты $p_k(x)$ дифференциальной операции (1) ограничены на полуси $x \geq 0$ вместе со своими производными до порядка $n - k$ ($k = 1, 2, \dots, n$), то при $\lambda \rightarrow \infty$ длина лакуны с центром в точке λ не превосходит $O\left(\lambda^{1 - \frac{1}{n}}\right)$.

Доказательство. Положим

$$\omega = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup p_1(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} \inf p_1(x)$$

и будем вначале для простоты считать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sup p_1(x) = - \lim_{x \rightarrow \infty} \inf p_1(x), \quad (14)$$

так что

$$\omega = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \sup |p_1(x)|.$$

Приведем, далее, дифференциальную операцию (1) к виду

$$l = \sum_{k=0}^{2n} q_k(x) \frac{d^{2n-k}}{dx^{2n-k}}, \quad (15)$$

где $q_0(x) \equiv (-1)^n$ и, следовательно, $q_1(x) \equiv 0$.

Для любой функции

$$\varphi_j(x) = \varphi_j(x; \lambda, \varepsilon)$$

пробной системы (72), (73) п° 31 имеем при больших λ

$$\begin{aligned} \|L\varphi_j - \lambda\varphi_j\| &\leq \|(-1)^n \varphi_j^{(2n)} - \lambda\varphi_j\| + \sum_{k=2}^{2n} \|q_k \varphi_j^{(2n-k)}\| \leq \\ &\leq \eta + \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \sup |p_1(x)| + \frac{\delta}{2} \right) \lambda^{\frac{n-1}{n}} + O\left(\lambda^{\frac{n-2}{n}}\right) \leq \\ &\leq \eta + \left(\frac{\omega}{2} + \delta \right) \lambda^{\frac{n-1}{n}}, \quad (16) \end{aligned}$$

где величины $\eta > 0$ и $\delta > 0$ сколь угодно малы при достаточно больших λ .

Из неравенства (16) следует, что радиус $r(\lambda)$ лакуны в $C(\tilde{L})$ с центром в точке λ не превосходит $\left(\frac{\omega}{2} + \delta\right) \lambda^{\frac{n-1}{n}}$, откуда вытекает требуемое соотношение

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup \lambda^{\frac{1-n}{n}} r(\lambda) \leq \frac{\omega}{2}.$$

В общем случае, когда равенство (14) не выполнено, приведенное доказательство следует видоизменить следующим образом. Положив

$$\tau = \frac{1}{2} \left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} \sup p_1(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} \inf p_1(x) \right\},$$

представляем операцию (1) в виде

$$(-1)^n y^{(2n)} + \tau y^{(2n-2)} + [q_2(x) - \tau] y^{(2n-2)} + \sum_{k=3}^{2n} q_k(x) y^{(2n-k)}$$

и заменяем при построении пробной системы функций по формуле (73) п° 31 множитель $\exp(i \sqrt[2n]{\lambda} x)$ на $\exp(i \mu x)$, где μ есть единственный положительный корень уравнения

$$\mu^{2n} + (-1)^{n-1} \tau \mu^{2n-2} - \lambda = 0,$$

который при $\lambda \rightarrow \infty$ имеет, очевидно, вид $\sqrt[2n]{\lambda} + o(\sqrt[2n]{\lambda})$.

Доказанное предположение является частным случаем следующей теоремы.

Теорема 5 [31 (9)]. *Если коэффициенты дифференциальной операции (15) ограничены на полуоси $x \geq 0$ и*

$$\omega_k = \lim_{x \rightarrow \infty} \sup q_k(x) - \lim_{x \rightarrow \infty} \inf q_k(x), \quad (17)$$

где $\omega_k = 0$ при $k < r$, но $\omega_r \neq 0$, то верхний предел отношения длины лакуны в $C(\tilde{L})$ с центром в точке λ

к $\omega_r \lambda^{1 - \frac{r}{2n}}$ при $\lambda \rightarrow \infty$ не превосходит единицы.

Доказательство этой теоремы свелось бы к повторению выкладок, приведенных при доказательстве предыдущей теоремы.

Теорема 5 остается справедливой, если в (17) считать $x \in J'$ (см. п° 31) и предполагать ограниченность коэффициентов операции (15) лишь на J' . В случае двучленной операции теорема 5 сводится к теореме 20 п° 31.

Заметим, что из предложений настоящего пункта следует, что непрерывная часть спектра $C(\tilde{L})$ при условии ограниченности коэффициентов операции (15) на J' всегда простирается в $+\infty$.

42. Признаки непрерывности положительной части спектра. Так как непрерывная часть спектра оператора $\tilde{L}$ в случае дифференциальной операции с постоянными коэффициентами $Q\left[-\frac{d^2}{dx^2}\right]$ (см. п° 40) покрывает полуось $\lambda \geq \mu$, где $\mu = \min_{\lambda \geq 0} Q(\lambda)$, то для любых $\lambda \geq \mu$ и $\eta > 0$ найдется в $\mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ нормированная финитная функция $\psi(x; \lambda, \eta)$, удовлетворяющая неравенству

$$\left\| Q\left[-\frac{d^2}{dx^2}\right]\psi - \lambda\psi \right\| < \eta.$$

Построим пробную систему функций $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$, полагая

$$\psi_j(x) \equiv \psi_j(x; \lambda, \eta) = \psi(x - \alpha_j; \lambda, \eta), \quad (18)$$

где числа α_j выбраны так, чтобы носители финитных функций $\psi_j(x)$ и $\psi_k(x)$ при $j \neq k$ не пересекались. Эта система функций позволяет установить следующее предложение.

Теорема 6 [31 (9)]. Если $p_0(x) \equiv 1$ и коэффициенты дифференциальной операции (1) «гладко» стремятся к конечным пределам, то есть

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_k(x) = a_k \quad (19)$$

и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_k^{(r)}(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, n - k), \quad (20)$$

то непрерывная часть спектра $C(\tilde{L})$ сплошь покрывает полуось $\lambda \geq \mu$.

Доказательство. Для любого $\lambda \geq \mu$ и системы функций (18) имеем

$$\begin{aligned} \|L\psi_j - \lambda\psi_j\| &\leq \|L\psi_j - Q\left[-\frac{d^2}{dx^2}\right]\psi_j\| + \|Q\left[-\frac{d^2}{dx^2}\right]\psi_j - \lambda\psi_j\| \leq \\ &\leq \left\| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} [p_k(x) - a_k] \frac{d^{2(n-k)}\psi_j}{dx^{2(n-k)}} \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{k=1}^{2n-1} r_k(x) \frac{d^k\psi_j}{dx^k} \right\| + \|Q\left[-\frac{d^2}{dx^2}\right]\psi_j - \lambda\psi_j\|, \end{aligned}$$

где, в силу (20), выполнены предельные соотношения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} r_k(x) = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n-1),$$

что в сочетании с (19) дает

$$\|L\psi_j - \lambda\psi_j\| < \eta \quad (j = 1, 2, \dots).$$

Из этого неравенства, в силу произвольности числа $\eta > 0$, следует подлежащее доказательству соотношение $\lambda \in C(\tilde{L})$.

Полученный результат остается, конечно, в силе, если в (19) и (20) считать $x \in J'$.

Заметим, что, за исключением случая двучленной операции, условия (19), (20) не означают, что возмущение первого слагаемого в (1) остальными членами является при достаточно большом γ малым в $\mathcal{L}_2(\gamma, \infty)$. Напротив, это возмущение при любом γ является неограниченным оператором. Более тонкий признак принадлежности полуоси $\lambda \geq 0$ множеству $C(\tilde{L})$ будет приведен в п° 43.

Следующие два предложения являются обобщением теорем 21 и 22 предыдущей главы.

Теорема 7 [31 (9)]. Если $p_0(x) \equiv 1$ и при любом $\delta > 0$ выполняются неравенства

$$\int_{M_{k,\delta}} |q_k(x)|^2 dx < \infty \quad (k = 2, 3, \dots, 2n), \quad (21)$$

где $M_{k,\delta}$ есть множество значений x , для которых $|q_k(x)| > \delta$, то положительная часть спектра оператора $\tilde{L}$ покрывает всю полуось $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Снова используя пробную систему функций, определенную формулами (72), (73) главы II, получим при $\lambda > 0$ и всех натуральных j , начиная с некоторого $j = m$,

$$\begin{aligned} \|L\varphi_j - \lambda\varphi_j\| &\leq \|(-1)^n \varphi_j^{(2n)} - \lambda\varphi_j\| + \delta \sum_{k=2}^{2n} \|\varphi_j^{(2n-k)}\| + \\ &+ \sum_{k=2}^{2n} \sup_{(0 \leq x < \infty)} |\varphi_j^{(2n-k)}(x)| \left\{ \int_{J_N \cap M_{k,\delta}} |q_k(x)|^2 dx \right\}^{1/2} \leq \\ &\leq \rho(\epsilon, \delta) \|\varphi_j\|, \quad (22) \end{aligned}$$

где $J_N = (N, \infty)$, функции $\varphi_j(x)$ при $j \geq m$ N -финитны и

$$\rho(\varepsilon, \delta) = \eta + A\delta + B V \varepsilon \max_{(k)} \left\{ \int_{J_N \cap M_{k, \delta}} |q_k(x)|^2 dx \right\}^{1/2},$$

причем числа A и B не зависят от ε и δ .

Из неравенства (22) следует, что

$$C(\tilde{L}) \cap [\lambda - \rho(\varepsilon, \delta), \lambda + \rho(\varepsilon, \delta)] \neq \emptyset, \quad (23)$$

но, в силу (21), можно выбрать число N так, чтобы было

$$\max_{(k)} \int_{J_N \cap M_{k, \delta}} |q_k(x)|^2 dx < 1,$$

и, следовательно, величина $\rho(\varepsilon, \delta)$ может быть сделана сколь угодно малой вместе с ε и δ . Поэтому из соотношения (23) следует включение $\lambda \in C(\tilde{L})$, которое и требовалось доказать.

Теорема 8. Если для некоторой последовательности интервалов Δ_j неограниченно растущей длины $|\Delta_j|$ выполнены соотношения

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|\Delta_j|} \int_{\Delta_j} |q_k(x)|^2 dx = 0 \quad (k = 2, 3, \dots, 2n),$$

то положительная часть спектра оператора $\tilde{L}$ покрывает всю полуось $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Для нормированной пробной системы функций $\varphi_j(x) = \varphi(x - \alpha_j; \lambda, \eta_j)$, определенных формулами (72), (73) главы II, имеем

$$\begin{aligned} \|L\varphi_j - \lambda\varphi_j\| &\leq \|(-1)^n \varphi_j^{(2n)} - \lambda\varphi_j\| + \sum_{k=2}^{2n} \left\| q_k \frac{d^{(2n-k)} \varphi_j}{dx^{2n-k}} \right\| \leq \\ &\leq \eta_j \|\varphi_j\| + B \max_{(k)} \frac{1}{2|\Delta_j|} \int_{\Delta_j} |q_k(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

где число B не зависит от j . Из этого неравенства при $j \rightarrow \infty$ получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|L\varphi_j - \lambda\varphi_j\| = 0$$

откуда следует включение $\lambda \in C(\tilde{L})$.

43. Теорема М. Ш. Бирмана. Эта теорема, содержащая в качестве частного случая теорему 25 п° 31 и основанная на исследовании относительно полной непрерывности, существенно улучшает первый из признаков п° 42. Ее доказательство опирается на следующий критерий компактности, являющийся обобщением леммы 2 п° 31.

Лемма 1 [13 (5)]. Пусть B есть минимальный незамкнутый симметрический оператор, определяемый операцией

$$(-1)^n \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} y + y \quad (24)$$

на полуоси $x \geq 0$, а K — симметрический оператор, определяемый на $\mathfrak{D}_B$ операцией вида

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \rho(x) \frac{d^k}{dx^k} y,$$

где $\rho(x) \geq 0$ и $k < n$.

Для того чтобы любое B -ограниченное множество было $K \sim$ компактным, необходимо и достаточно, чтобы при некотором (а значит, и при любом) $\omega > 0$ выполнялось предельное соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+\omega} \rho(t) dt = 0. \quad (25)$$

Доказательство при $k=0$ совпадает с приведенным в п° 31. В общем случае положим

$$z(x) = y^{(k)}(x).$$

Если некоторое множество $\mathfrak{M}$ функций $y(x)$ является B -ограниченным, то, в силу неравенства (6) п° 26, соответствующее множество функций $z(x)$ ограничено в метрике функционала

$$\int_0^\infty (|z^{(n-k)}|^2 + |z|^2) dx$$

и при выполнении условия (25), в силу леммы 2 п° 31, оно будет компактным в метрике функционала

$$\int_0^\infty \rho(x) |z|^2 dx,$$

то есть множество $\mathfrak{M}$ $K \sim$ компактно.

Доказательство необходимости предельного соотношения (25) проводится, как и в случае леммы 2 п° 31, если подчинить бесконечную систему $\{y_j(x)\}$ финитных функций с непересекающимися носителями условиям

$$y_j^{(k)}(x) \equiv 1 \quad (x_j \leq x \leq x_j + \omega).$$

Теорема 9 [13 (5)]. *Если при некотором $\omega > 0$ коэффициенты дифференциальной операции (1) удовлетворяют условиям*

$$0 < \alpha \leq p_0(x) \leq \beta < +\infty, \quad (26)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+\omega} |p_0(t) - 1| dt = 0, \quad (27)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \int_x^{x+\omega} |p_k(t)| dt = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (28)$$

то соответствующий оператор $\tilde{L}$ ограничен снизу и непрерывная часть его спектра совпадает с полуосью $\lambda \geq 0$.

Доказательство при $p_0(x) \equiv 1$ непосредственно вытекает из предыдущей леммы. Действительно, в этом случае в силу (28) операторы, определяемые каждой из операций

$$(-1)^k \frac{d^k}{dx^k} p_{n-k}(x) \frac{d^k}{dx^k} y \quad (k = 0, 1, \dots, n-1), \quad (29)$$

вполне непрерывны относительно оператора B по теореме 17 п° 4. Поэтому их сумма также вполне непрерывна относительно оператора B . Но тогда в силу леммы 1 п° 4 оператор L полуограничен, а в силу теоремы 19 п° 5 его непрерывная часть спектра совпадает с непрерывной частью спектра оператора дифференцирования $2n$ -го порядка, то есть с полуосью $\lambda \geq 0$, что и требовалось установить.

Для учета влияния возмущения $p_0(x) - 1$, вносимого в старший коэффициент операции (24), определяющей оператор B , воспользуемся общей теоремой 20 п° 5. При этом роль A будет играть минимальный незамкнутый симметрический оператор, определяемый на полуоси $x \geq 0$ операцией

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n} p_0(x) \frac{d^n}{dx^n} y + y.$$

Далее, оператор K есть разность

$$K = B - A,$$

так что в качестве мажорирующего оператора K_1 можно взять минимальный незамкнутый симметрический оператор, определяемый на полуоси $x \geq 0$ операцией

$$\frac{d^n}{dx^n} |1 - p_0(x)| \frac{d^n}{dx^n}.$$

В силу теоремы 20 п° 5, достаточно установить эквивалентность A - и B -метрик, A -ограниченность функционала $(K_1 f, f)$ и $\tilde{K}_1$ -компактность образа $\mathring{B}^{-1} F$ любого ограниченного в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ множества функций F .

Эквивалентность A - и B -метрик вытекает из двойного неравенства (26). Из этого же неравенства вытекает A -ограниченность квадратичного функционала $(K_1 f, f)$.

Переходя к доказательству основного свойства оператора $\tilde{K}_1$, положим при $f \in F$

$$\mathring{B}^{-1} f = y,$$

так что

$$(-1)^n y^{(2n)} + y = f(x). \quad (30)$$

Нижняя грань оператора $\mathring{B}$, очевидно, равна единице, так что

$$\|y\|^2 \leq (\mathring{B}y, y) = (f, y) \leq \|f\| \cdot \|y\|,$$

то есть

$$\|y\| \leq \|f\|, \quad (31)$$

а тогда из (30) следует

$$\|y^{(2n)}\| \leq 2 \|f\|. \quad (32)$$

Так как множество F ограничено в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$, то при $f \in F$ в силу (31) и (32) будет

$$\int_0^\infty (|y^{(2n)}|^2 + |y|^2) dx \leq C.$$

Последнее неравенство означает ограниченность семейства функций $y(x)$ в пространстве $W_2^{(2n)}$, но тогда, в силу условия (27), на основании леммы 1, примененной к диф-

ференциальным операторам B порядка $4n$ и K порядка n . заключаем, что множество $\mathring{B}^{-1}F$ является $\tilde{K}_1$ -компактным. Но тогда, в силу теоремы 20 п° 5, будет $C(B) = C(A)$, так что непрерывная часть спектра положительного оператора, определяемого операцией

$$(-1) \frac{d^n}{dx^n} p_0(x) \frac{d^n}{dx^n}, \quad (33)$$

совпадает с полуосью $\lambda \geq 0$.

Прибавление к операции (33) членов вида (29) при $k < n$ оставляет соответствующий оператор ограниченным снизу и не меняет непрерывной части его спектра, так как операторы, определяемые операцией (29), в силу условия (28), вполне непрерывны относительно оператора B , а значит, в силу эквивалентности A - и B -метрик, вполне непрерывны относительно A .

Теорема доказана полностью.

44. Теорема М. Г. Крейна о мультипликативной структуре положительных дифференциальных операторов. Пусть коэффициенты $p_k(x)$ дифференциальной операции (1) принадлежат $C_{n-k}(0, \infty)$ и

$$P[u, v] = \sum_{j, k=0}^{2n-1} a_{jk}(x) u^{(j)} v^{(k)} \quad (34)$$

есть билинейная форма, определяемая тождеством Лагранжа

$$ul[v] - vl[u] = \frac{d}{dx} P[u, v]. \quad (35)$$

В (34) $a_{jk} = 0$ при $j + k \geq 2n$ и $a_{n-1, n} = (-1)^n p_0(x)$.

Из соотношения (35) для любой пары решений $u(x)$ и $v(x)$ однородного уравнения

$$l[y] = 0 \quad (36)$$

вытекает тождество

$$P[u, v] \equiv C \quad (0 \leq x < \infty). \quad (37)$$

Если, в частности, $u(x)$ и $v(x)$ суть два решения уравнения (36), удовлетворяющих условиям

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0, \quad (38)$$

то из (34) следует, что при $x=0$ будет $P[u, v] = 0$. Но тогда, в силу (37), будет при всех $x \geq 0$

$$P[u, v] \equiv 0. \quad (39)$$

Два решения уравнения (36), удовлетворяющих условию (39), называются сопряженными. Существуют системы n линейно

независимых попарно сопряженных решений уравнения (36). Примером такой системы является любой базис n -мерного многообразия решений уравнения (36) при условиях (38).

Пусть $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ есть произвольная система линейно независимых и попарно сопряженных решений уравнения (36). Обозначая через ϖ вронскиан системы функций, введем дифференциальную операцию n -го порядка

$$\mu[y] = \frac{\varpi[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n; y]}{\varpi[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]} \quad (40)$$

и через $\mu^*[y]$ обозначим операцию, сопряженную к ней в смысле Лагранжа.

Согласно классической теореме Фробениуса ([98], см. также [3]), операция $l[y]$ допускает мультипликативное представление

$$l[y] = \mu^* p_0 \mu[y], \quad (41)$$

справедливое в любой точке $x \geq 0$, где

$$\varpi[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \neq 0. \quad (42)$$

Из (40) следует, что в точках, где выполнено условие (42), коэффициенты дифференциальной операции

$$\mu[y] = y^{(n)} + q_1 y^{(n-1)} + \dots + q_n y$$

будут n -кратно непрерывно дифференцируемы.

Если при всех $x > 0$ выполнено (42), то из представления (41) непосредственно вытекает положительность оператора L . М. Г. Крейн установил [53 (1)] обратное предложение: если оператор L положителен, то существует система n линейно независимых попарно сопряженных решений уравнения (36), для которой условие (42) выполнено при всех $x > 0$, так что мультипликативное представление (41) также имеет место при всех $x > 0$. Ниже приводится доказательство этой теоремы, а также доказательство М. Г. Крейна теоремы Фробениуса. Переход от конечного интервала, рассматривавшегося в [53 (1)], к полуоси $x \geq 0$ почти не требует внесения в [53 (1)] каких-либо изменений.

Теорема 10 [98]. Для каждой системы n линейно независимых решений $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ уравнения (36), удовлетворяющих при $x \geq 0$ условию

$$P[\omega_j, \omega_k] = 0 \quad (j, k = 1, 2, \dots, n), \quad (43)$$

имеет место мультипликативное представление (41), справедливое в любой точке $x \geq 0$, в которой выполнено неравенство (42).

Доказательство [53 (1)]. Пусть $V(x, s)$ есть функция Коши операции $\mu[y]$, так что

$$V(x, s) = \sum_{k=1}^n \omega_k^*(s) \omega_k(x) \quad (44)$$

и

$$\mu^*[\omega_j^*] = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n). \quad (45)$$

Пусть, далее, при $x_0 < x < a$ выполнено условие (42) (в [3] показано, что нули вронскиана ω не имеют конечных предельных точек).

Так как транспонированное ядро $V(s, x)$ является функцией Коши операции $\mu^*[y]$, то для любой функции $f(x) \in C(x_0, a)$ будет

$$\mu^* \left\{ \int_{x_0}^x V(s, x) f(s) ds \right\} = f(x)$$

или, при $f(x) = l[y]$,

$$l[y] = \mu^* \left\{ \int_{x_0}^x V(s, x) l_s[y] ds \right\}. \quad (46)$$

Теперь покажем, что представление (46) совпадает с искомым представлением (41).

Полагая в тождестве

$$\int_{x_0}^x z(s) l_s[y] ds = P[y, z] \Big|_{x_0}^x + \int_{x_0}^x l_s[z] y(s) ds$$

$z(s) = V(s, x)$ и учитывая, что тогда будет $l_s[z] = 0$, получаем с помощью (44)

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x V(s, x) l_s[y] ds &= P_s[V(s, x), y(s)] \Big|_{s=x_0}^{s=x} = \\ &= \left\{ \sum_{j=1}^n P_s[\omega_j, y] \omega_j^*(x) \right\} \Big|_{s=x_0}^{s=x} = m[y] - \sum_{j=1}^n c_j \omega_j^*(x), \end{aligned} \quad (47)$$

где

$$m[y] = \sum_{j=1}^n P_x[\omega_j, y] \omega_j^*(x). \quad (48)$$

Подставляя (47) в (46) и пользуясь равенствами (45), получаем представление операций $l[y]$ в виде

$$l[y] = \mu^* m[y],$$

и остается установить совпадение дифференциальных операций n -го порядка $m[y]$ и $(-1)^n p_0 \mu[y]$.

Так как фундаментальная система $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ уравнения $\mu[y] = 0$ является, в силу (43) и (48), фундаментальной системой уравнения $m[y] = 0$, то достаточно установить совпадение старших коэффициентов операций $m[y]$ и $(-1)^n p_0 \mu[y]$. Но,

в силу (34) и (48), коэффициент при $y^{(n)}$ в (48) есть

$$a_{n-1, n}(x) \left\{ V(s, x) \Big|_{s=x} + \frac{\partial V(s, x)}{\partial s} \Big|_{s=x} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{\partial^{n-2} V(s, x)}{\partial s^{n-2}} \Big|_{s=x} + \frac{\partial^{n-1} V(s, x)}{\partial s^{n-1}} \Big|_{s=x} \right\},$$

а так как

$$\frac{\partial^k V(s, x)}{\partial s^k} \Big|_{s=x} = \begin{cases} 0 & (0 \leq k \leq n-2), \\ 1 & (k = n-1) \end{cases}$$

и

$$a_{n-1, n}(x) = (-1)^n p_0(x),$$

то старшие коэффициенты операций $m[y]$ и $(-1)^n p_0[y]$ одинаковы.

Таким образом, теорема Фробениуса доказана.

Теорема 11 [53(1)]. Если оператор L положителен в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$, то существует система линейно независимых решений $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ уравнения (36), удовлетворяющая условию (43), причем для всех $x > 0$ выполняется условие

$$\omega[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \neq 0.$$

Доказательство. При некотором $a > 0$ определим в $\mathcal{L}_2(0, a)$ с помощью краевых условий

$$y^{(k)}(0) = y^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

регулярный самосопряженный оператор L_a . Так как оператор L положителен, то оператор L_a будет положительно определенным. Его функция Грина имеет вид

$$K(x, s) = \begin{cases} \sum_{j=1}^n \psi_j(x) \chi_j(s) & (x \leq s), \\ \sum_{j=1}^n \psi_j(s) \chi_j(x) & (x \geq s), \end{cases} \quad (49)$$

где $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$ есть некоторая система линейно независимых решений уравнения (36), удовлетворяющих начальным условиям

$$y(0) = y'(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0. \quad (50)$$

С другой стороны, согласно теореме Мерсера, будет в смысле равномерной сходимости

$$K(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(s)}{\lambda_k}, \quad (51)$$

где $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — полная ортонормированная система собственных функций позитивного ядра $K(x, s)$, а $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ — соответствующая последовательность характеристических значений.

Дифференцируя обе части (51) p раз по x и q раз по s ($p, q = 0, 1, \dots, n-1$), получаем (см. [37], [38]) разложения

$$K_{pq}(x, s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^{(p)}(x) \varphi_k^{(q)}(s)}{\lambda_k}, \quad (52)$$

сходящиеся абсолютно и равномерно в квадрате $0 \leq x, s \leq a$.

Введем в рассмотрение квадратичную форму от n переменных

$$\sum_{p, q=0}^{n-1} K_{pq}(x, x) \xi_p \xi_q \quad (0 < x < a). \quad (53)$$

Положительность этой квадратичной формы очевидна, так как из (52) следует равенство

$$\sum_{p, q=0}^{n-1} K_{pq}(x, x) \xi_p \xi_q = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left\{ \sum_{p=0}^{n-1} \varphi_k^{(p)}(x) \xi_p \right\}^2}{\lambda_k}. \quad (54)$$

Ее нетрудно также вывести с помощью предельного перехода непосредственно из позитивности ядра $K(x, s)$, минуя разложение (51), но из (54) легко следует, что форма (53) не только положительна, но и положительно определена.

Действительно, из равенства

$$\sum_{p, q}^{n-1} K_{pq}(s_0, s_0) \xi_p \xi_q \quad (0 < s_0 < a)$$

и (54) следует при любом k

$$\sum_{p=0}^{n-1} \xi_p \varphi_k^{(p)}(s_0) = 0.$$

Отсюда, снова используя разложение (52) при $q = 0$, получаем

$$\sum_{p=0}^{n-1} \xi_p K_{0p}(x, s_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k(x) \left\{ \sum_{p=0}^{n-1} \xi_p \varphi_k^{(p)}(s_0) \right\}}{\lambda_k} = 0 \quad (55)$$

тождественно по x в интервале $0 < x < a$.

С другой стороны, пользуясь известными свойствами функции Грина, легко получить соотношения

$$K_{rp}(s+0, s) - K_{rp}(s-0, s) = \begin{cases} 0 & (r+p < 2n-1), \\ \frac{(-1)^p}{p_0(s)} & (r+p = 2n-1). \end{cases} \quad (56)$$

Полагая

$$g(x) = \sum_{p=0}^{n-1} \overset{\circ}{\xi}_p K_{0p}(x, s_0), \quad (57)$$

имеем, в силу (55),

$$g(x) \equiv 0, \quad (58)$$

но, с другой стороны, дифференцируя обе части (57) n раз по x и пользуясь соотношениями (56), получаем

$$g^{(n)}(s_0 + 0) - g^{(n)}(s_0 - 0) = \frac{\overset{\circ}{\xi}_{n-1}}{p_0(s_0)},$$

так что $\overset{\circ}{\xi}_{n-1} = 0$. Теперь, дифференцируя обе части (57) $n+1$ раз по x и пользуясь соотношениями (56), (58), также получим, что $\overset{\circ}{\xi}_{n-2} = 0$.

Продолжая этот прием, получим окончательно

$$\overset{\circ}{\xi}_0 = \overset{\circ}{\xi}_1 = \dots = \overset{\circ}{\xi}_{n-1} = 0,$$

откуда вытекает положительная определенность квадратичной формы (53).

Так как форма (53) положительно определенная, то

$$\text{Det} \| K_{pq}(x, x) \|_{p, q=0}^{n-1} > 0 \quad (0 < x < a). \quad (59)$$

Но при p и q меньших n имеем, в силу (49),

$$K_{pq}(x, x) = \sum_{j=1}^n \psi_j^{(p)}(x) \chi_j^{(q)}(x),$$

так что имеет место матричное равенство

$$\| K_{pq}(x, x) \|_{p, q=0}^{n-1} = \| \psi_j^{(p)} \| \| \chi_j^{(q)} \|^*. \quad (60)$$

Из соотношений (60) и (59) следует, что при $0 < x < a$ будет

$$\omega[\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n] \omega[\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_n] = \text{Det} \| K_{pq}(x, x) \|_{p, q=0}^{n-1} > 0,$$

откуда вытекает соотношение

$$\omega[\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n] \neq 0 \quad (0 < x < a). \quad (61)$$

Пусть теперь $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ есть любой базис n -мерного многообразия решений уравнения (36), удовлетворяющих начальным уравнениям (38). Как уже отмечалось в начале пункта, функции $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ попарно сопряжены, то есть

$$P[\omega_j, \omega_k] \equiv 0 \quad (0 \leq x < \infty; j, k = 1, 2, \dots, n).$$

Покажем, что при любом $x_0 > 0$ будет

$$\omega[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \neq 0. \quad (62)$$

С этой целью для данного x_0 выберем число $a > x_0$ и построим по формулам (49) функцию Грина оператора L_a . Тогда для функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$, которые зависят от a , будет выполнено (61), но функции $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$ суть линейные комбинации функций $\psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_n(x)$, так что

$$\mathcal{W}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] = \gamma \mathcal{W}[\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n] \quad (0 < x < a),$$

где постоянная γ , в силу линейной независимости функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_n(x)$, не равна нулю.

Таким образом, неравенство (61) выполнено при всех положительных значениях x , меньших a , и в частности при $x = x_0$.

Теорема доказана полностью.

Из теорем 11 и 12 вытекает следующее предложение о мультипликативной структуре положительных дифференциальных операторов, упомянутое в п° 40.

Теорема 12 [53(1)]. Для того чтобы оператор L был положительным в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$, необходимо и достаточно, чтобы операция l была представима в виде

$$l[y] = \mu^* p_0 \mu[y] \quad (0 < x < \infty),$$

где

$$\mu[y] = y^{(n)} + q_1(x) y^{(n-1)} + \dots + q_n(x) y$$

есть операция с коэффициентами $q_k(x) \in C_n(0, \infty)$ ($k = 1, 2, \dots, n$), а $\mu^*[y]$ — ей сопряженная по Лагранжу операция.

В заключение укажем, что детальное исследование систем сопряженных решений и соответствующих вронскианов $\mathcal{W}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ проведено в недавно опубликованной статье Е. Хайнца [99]. В предисловии Ван-дер-Вардена к этой статье отмечается, что она является оформлением и завершением исследований Реллиха [83(5)]. В частности, интересно отметить следующую теорему Хайнца — Реллиха, являющуюся обобщением классической теоремы Штурма о перемежаемости нулей решений дифференциального уравнения второго порядка.

Теорема 13 [99]. Если вронскиан некоторой системы n линейно независимых и попарно сопряженных решений уравнения (36) в некотором интервале $[\alpha, \beta]$ имеет n нулей, то вронскиан любой другой системы n попарно сопряженных решений этого уравнения имеет в этом интервале по крайней мере один нуль.

Эта теорема позволяет установить вторую часть следующего предложения о связи между нулями вронскианов $\mathcal{W}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ и отрицательной частью спектра операторов $\tilde{L}$.

Теорема 14. Если вронскиан какой-нибудь системы n линейно независимых попарно сопряженных решений уравнения (36) имеет конечное число нулей на полуоси $x > 0$, то отрицательная часть спектра $S(\tilde{L})$ есть конечное множество.

Обратно, если отрицательная часть спектра $S(\tilde{L})$ есть конечное множество, то вронскиан любой системы n линейно независимых попарно сопряженных решений уравнения (36) имеет лишь конечное число нулей.

Доказательство. Если число нулей вронскиана $w[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n]$ конечно, то существует число $N \geq 0$ такое, что при $x > N$ будет

$$w[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n] \neq 0.$$

Поэтому, в силу теоремы Фробениуса, операция l на полуоси $x > N$ представима в виде (41), откуда следует положительность оператора, порождаемого операцией l на полуоси $x > N$. Отсюда на основании теоремы 28 п° 10 следует конечность множества точек отрицательной части спектра $S(\tilde{L})$.

Если, обратно, отрицательная часть спектра $S(\tilde{L})$ состоит из конечного числа точек, то, в силу той же теоремы 28 п° 10, при некотором $N \geq 0$ оператор L_N будет положительным. Но тогда, по теореме М. Г. Крейна, вронскиан некоторой системы n линейно независимых попарно сопряженных решений уравнения (36) будет отличен от нуля при $x > N$, а следовательно, будет иметь на полуоси $x > 0$ лишь конечное число нулей. Теперь из теоремы 13 Хайнца — Реллиха следует, что вронскиан любой системы n линейно независимых попарно сопряженных решений уравнения (36) будет иметь лишь конечное число нулей на полуоси $x > 0$. Таким образом, теорема доказана полностью.

ГЛАВА IV

СПЕКТР МНОГОМЕРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

45. Многомерные дифференциальные операции. Эта глава посвящена изложению методов исследования характера спектра самосопряженных операторов $\tilde{L}$, порождаемых в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ дифференциальной операцией

$$l[u] = -\Delta u + q(P)u, \quad (1)$$

где потенциал $q(P)$ предполагается непрерывно дифференцируемым. Область Ω может совпадать со всем эвклидовым пространством $\mathbb{E}_m$, либо составлять его правильную часть. В последнем случае потенциал предполагается непрерывно дифференцируемым вплоть до границы S области Ω , так что сингулярность операции (1) вызывается только бесконечностью области Ω .

Теоремы $n^\circ n^\circ$ 46—50 в соответствующей формулировке могут быть перенесены и на более общую операцию

$$(-1)^n \Delta^n u + q(P)u. \quad (2)$$

Помимо предложений о характере спектра в зависимости от поведения потенциала, приводящих к обобщениям одномерных признаков главы II, здесь рассматриваются также вопросы о влиянии на спектр вида области, постановка которых характерна для многомерного случая.

Как и ранее (см. подстрочное примечание на стр. 78), избегая точного описания класса областей или поверхностей, которые приходится рассматривать ниже, мы пользуемся термином «любая», хотя любая область или поверхность должны быть стеснены какими-то весьма общими условиями. Далее, утверждение об отсутствии у однородного уравнения

решения, принадлежащего к заданному классу, означает отсутствие в этом классе нетривиального решения.

Некоторые дальнейшие вопросы качественного спектрального анализа эллиптических краевых задач рассмотрены в недавно появившейся статье [13 (7)] М. Ш. Бирмана, где они систематически связываются с соответствующими теоремами вложения. По поводу спектра неэллиптических задач см. [75]. Из других работ по качественному спектральному анализу многомерных краевых задач укажем еще на статьи [16], [17] и [25].

46. Теоремы о дискретной части спектра. В этом пункте рассматриваются полуограниченные операторы. Как и в одномерном случае простейшим признаком здесь является Теорема 1 [97 (1)]. Если

$$\lim_{|OP| \rightarrow \infty} \inf q(P) = \mu > -\infty,$$

то $L = L^*$ и на полуоси $(-\infty, \mu)$ спектр оператора L исчерпывается собственными значениями конечной кратности с единственной возможной предельной точкой $\lambda = \mu$.

Доказательство [31 (5)]. Первое утверждение следует из теоремы 34 н° 16. Приступая к доказательству второго утверждения, предположим для определенности, что $\mu < \infty$, и выберем радиус $R = R_\epsilon$ сферы расщепления $|OP| = R_\epsilon$ так, чтобы при $|OP| > R_\epsilon$ было $q(P) > \mu - \epsilon$, где $\epsilon > 0$.

Согласно теореме 36 н° 17 имеем

$$C(L) = C(L_R),$$

где L_R есть замыкание оператора $\dot{L}_R$, определяемого операцией (1) при $|OP| > R_\epsilon$ на дважды непрерывно дифференцируемых функциях, обращающихся в нуль вблизи поверхности расщепления $|OP| = R_\epsilon$.

При $\varphi \in \mathfrak{D}\dot{L}_R$ имеем

$$(L_R \varphi, \varphi) > (\mu - \epsilon)(\varphi, \varphi),$$

так что

$$C(L_R) \cap (-\infty, \mu - \epsilon) = \emptyset$$

и, следовательно,

$$C(L) \cap (-\infty, \mu - \epsilon) = \emptyset,$$

откуда, в силу произвольности числа $\epsilon > 0$, получаем соотношение

$$C(L) \cap (-\infty, \mu) = \emptyset.$$

Так как, кроме этого, из ограниченности снизу оператора L следует ограниченность снизу его спектра $S(L)$, то теорема доказана.

Интегральный признак ограниченности и дискретности отрицательной части спектра дает следующая

Теорема 2 [31 (10)]. Если при любом $\delta > 0$ сходится интеграл

$$\int_0^{\infty} |q_{\delta}^*(P)| dr, \quad (3)$$

где

$$q_{\delta}^*(P) = \begin{cases} q^*(P) & (|q^*(P)| > \delta), \\ 0 & (|q^*(P)| \leq \delta) \end{cases}$$

и

$$q^*(P) = \min \{q(P), 0\},$$

то $L = L^*$, отрицательная часть спектра оператора L ограничена и дискретна.

Доказательство. Преобразуем соответствующий операции (1) квадратичный функционал

$$\Phi_{\varepsilon}[u] = \int_{\mathbb{E}} |\nabla u|^2 d\omega + \int_{\mathbb{E}} q |u|^2 d\omega + \varepsilon \int_{\mathbb{E}} |u|^2 d\omega$$

с помощью замены переменных

$$u = r^{-1}v, \quad (4)$$

где u — произвольная вещественная функция из $\mathfrak{D}_L$. Имеем

$$|\nabla u|^2 = \frac{1}{r^2} |\nabla v|^2 + \frac{1}{r^4} v^2 - \frac{2v}{r^3} \frac{\partial v}{\partial r},$$

но интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{E}} \frac{1}{r^3} 2v \frac{\partial v}{\partial r} d\omega &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial v^2}{\partial r} dr = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{v^2}{r^2} \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta, \end{aligned}$$

так что

$$\Phi_{\varepsilon}[u] = \int_{\mathbb{E}} \{ |\nabla v|^2 + (q + \varepsilon) v^2 \} \frac{d\omega}{r^2}.$$

При произвольно заданном ε ($0 < \varepsilon < 1$) выберем, пользуясь сходимостью интеграла (3), число $N = N_\varepsilon$ так, чтобы для области $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \leq \vartheta \leq \frac{\pi}{2}$ было

$$\int_N^\infty |q^*(r, \varphi, \vartheta)| dr < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (5)$$

и покажем, что функционал

$$\Phi_\varepsilon^*[u] = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \int_N^\infty \{|\nabla v|^2 + (q^* + \varepsilon)v^2\} dr \quad (6)$$

неотрицателен на любой N -финитной функции $u \in \mathfrak{D}_L$. Пусть

$$\widehat{v}(\varphi, \vartheta) = \max_{N < r < \infty} |v(r, \varphi, \vartheta)|$$

и $R(\varphi, \vartheta)$ есть расстояние от начала координат до ближайшей точки максимума модуля N -финитной функции $v(r, \varphi, \vartheta)$ при $N < r < \infty$. Не ограничивая общности, можно считать функцию $v(r, \varphi, \vartheta)$ нормированной так, что

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_N^\infty |v|^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta = 1. \quad (7)$$

Теперь, дважды используя неравенство Коши — Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \widehat{v}^2(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta d\varphi d\vartheta &= \\ &= - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \int_{R(\varphi, \vartheta)}^\infty v \frac{\partial v}{\partial r} dr \leq \\ &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \left\{ \int_{R(\varphi, \vartheta)}^\infty v^2 dr \right\}^{1/2} \left\{ \int_{R(\varphi, \vartheta)}^\infty \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 dr \right\}^{1/2} \sin \vartheta d\varphi d\vartheta \leq \\ &\leq \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{R(\varphi, \vartheta)}^\infty v^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta \right\}^{1/2} \times \\ &\times \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_{R(\varphi, \vartheta)}^\infty \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 \sin \vartheta dr d\varphi d\vartheta \right\}^{1/2} \leq \left\{ \int_{\mathfrak{E}} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 \frac{d\omega}{r^2} \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

но, с другой стороны, очевидно,

$$\int_{(8)} |\nabla v|^2 \frac{d\omega}{r^2} \geq \int_{(8)} \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 \frac{d\omega}{r^2}.$$

Таким образом, имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \int_N^{\infty} |\nabla v|^2 \sin \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta \geq \\ & \geq \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{v}^2(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \right\}^2, \end{aligned} \quad (8)$$

аналогичное неравенству (7) п° 26.

Рассмотрим отдельно два случая:

$$1^\circ) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{v}^2(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \leq 1,$$

$$2^\circ) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{v}^2(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta > 1.$$

В первом случае, опуская в (6) под знаком интеграла слагаемое $|\nabla u|^2$ и пользуясь соотношениями (5), (7), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon[u] & > \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \int_N^{\infty} q v^2 \, dr + \\ & + \varepsilon \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \sin \varphi \, d\varphi \, d\vartheta \int_N^{\infty} |v|^2 \, dr \geq \\ & \geq - \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{v}^2(r, \varphi) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \int_N^{\infty} |q^*| \, dr + \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Во втором случае, опуская в (6) последнее слагаемое под интегралом и пользуясь неравенствами (5), (8), получаем

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon[u] &> \frac{1}{4} \left\{ \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{v}^2(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \right\}^{1/2} - \\ &- \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{v}^2(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \int_N^\infty |q^*| \, dr > \\ &> \left\{ \frac{1}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{v}^2(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta - \right. \\ &\left. - \frac{\varepsilon}{4} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \hat{v}^2(\varphi, \vartheta) \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \right\} > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в обоих случаях установлено неравенство

$$\Phi_\varepsilon[u] > 0, \quad (9)$$

из которого, в силу результатов п° 19, вытекает ограниченность оператора L снизу, а следовательно, и его самосопряженность. Из неравенства (9) в силу теоремы 41 п° 19 следует также дискретность отрицательной части спектра оператора L . Теорема доказана.

В частности, теорема 2 имеет место, если при некотором $\nu \geq 1$ сходится при любых угловых координатах интеграл

$$\int_0^\infty |q(P)|^\nu \, dr.$$

При $\nu = m = 1$ этот последний признак сводится к известному признаку Г. Вейля, цитированному в п° 27.

Для доказательства теоремы 2 при любом m следует вместо (4) использовать замену переменных

$$u = r^{\frac{1-m}{2}} v. \quad (10)$$

Если оператор L самосопряжен, полуограничен и имеет левее точки $\lambda = \mu$ лишь дискретный спектр

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots, \quad (11)$$

то из спектральной формулы непосредственно следует, что для собственных значений $\{\lambda_k\}$ сохраняются вариационные принципы Р. Куранта.

В частности, имеем

$$\lambda_k = \inf (Lu, u), \quad (12)$$

где $u \in \mathfrak{D}_L$, $\|u\| = 1$, $(u, \varphi_j) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, k-1$) и $\{\varphi_j\}$ есть последовательность собственных функций, соответствующих собственным значениям (11). Согласно определению минимального оператора L , в (12) можно считать функцию u финитной.

Следующие предложения являются обобщением на сингулярные краевые задачи известных теорем сравнения Р. Куранта.

Лемма 1 [40]. Пусть $\{\lambda_j\}$ и $\{\lambda'_j\}$ суть спектры регулярных краевых задач, определяемых операцией (1) в ограниченной области ω с условиями $u = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на границе S этой области соответственно. Пусть, далее, $\alpha > -\infty$ есть первая точка спектра самосопряженного оператора L_S в $\mathcal{L}_2[S, \infty]$, определяемого операцией (1) и краевым условием $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{P \in S} = 0$. Тогда число k собственных значений самосопряженного оператора L в $\mathcal{L}_2(\mathfrak{E}_m)$, меньших α , удовлетворяет неравенству

$$n \leq k \leq n', \quad (13)$$

где числа n и n' определяются неравенствами

$$\lambda_n < \alpha \leq \lambda_{n+1}, \quad \lambda'_{n'} < \alpha \leq \lambda'_{n'+1}.$$

Доказательство. Не ограничивая общности, примем $m = 3$ и $\alpha = 0$. Собственные функции двух регулярных краевых задач, соответствующие отрицательным собственным значениям $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ и $\{\lambda'_j\}_{j=1}^{n'}$, обозначим через $\{\varphi_j(P)\}_{j=1}^n$ и $\{\psi_j(P)\}_{j=1}^{n'}$ соответственно.

Сначала установим левую часть неравенства (13). Если бы было $k < n$, то некоторая нетривиальная линейная комбинация $u(P) = \sum_{j=1}^n C_j \varphi_j(P)$ была бы ортогональна ко всем

собственным функциям оператора L , соответствующим его первым k собственным значениям. Для функции u было бы

$$(L[u], u) < 0. \quad (14)$$

Сглаживая функцию u в соответствии с леммой 3 п° 19, получим функцию $\tilde{u} \in \mathfrak{D}_L$, ортогональную ко всем собственным функциям оператора L , соответствующим его отрицательным собственным значениям.

Для такой функции должно быть

$$(L\tilde{u}, \tilde{u}) \geq 0,$$

в то время как из (13) получается

$$(L\tilde{u}, \tilde{u}) < 0.$$

Обнаруженное противоречие доказывает левую часть двойного неравенства (13).

Переходя к доказательству правой части неравенства (13), обозначим через $v_1(P), v_2(P), \dots, v_k(P)$ линейно независимые собственные функции оператора L , соответствующие его k первым отрицательным собственным значениям.

Если было бы $k > n'$, то некоторая нетривиальная линейная комбинация $v(P) = \sum_{j=1}^k c_j v_j(P)$ удовлетворяла бы условиям

$$\int_{\omega} v(P) \overline{\psi_j(P)} d\omega = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n').$$

Для функции v было бы

$$(Lv, v) < 0,$$

то есть

$$(L[v], v) = (l[v], v)_{\omega} + (l[v], v)_{\mathfrak{S}-\omega} < 0, \quad (15)$$

где второе слагаемое $(l[v], v)_{\mathfrak{S}-\omega}$ не может быть отрицательным, ибо в противном случае была бы отрицательна величина

$$\inf (l[v], v)_{\mathfrak{S}-\omega}, \quad (16)$$

$$v \in \mathfrak{D}_L, \quad \|v\| = 1.$$

Но величина (16) не изменится, если подчинить функцию v естественному краевому условию $\frac{\partial v}{\partial n} \Big|_S = 0$, так что оказа-

лась бы отрицательной величина

$$\inf (L_S v, v), \\ v \in \mathfrak{D}_{L_S}, \quad \|v\| = 1,$$

что означало бы существование отрицательной точки спектра у оператора L_S , вопреки предположению.

Поэтому из (15) следует неравенство

$$(l[v], v)_\omega < 0,$$

а тогда был бы отрицателен минимум квадратичного функционала, соответствующий краевой задаче в области ω при связях $(v, \psi_j) = 0$ ($j = 1, 2, \dots, n'$) с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{P \in S} = 0$, поскольку это условие естественное. Но этот

минимум равен числу $\lambda'_{n'+1}$, которое неотрицательно.

Обнаруженное противоречие доказывает правую часть двойного неравенства (13).

Нетрудно обобщить в соответствующей форме лемму 1 на случай, когда число $\alpha > -\infty$ есть первая точка непрерывной части спектра оператора L_S , которой предшествует лишь конечное число собственных значений конечной кратности. В силу результатов п° 16 можно вместо всего пространства $\mathfrak{E}$ рассматривать часть $\mathfrak{E}$, ограниченную бесконечной поверхностью с краевым условием $u = 0$ на ней.

Лемма 2. Пусть минимальные операторы L_1 и L_2 , определяемые операцией (1) в областях Ω_1 и Ω_2 с нулевыми краевыми условиями на границе, являются самосопряженными.

Если область Ω_2 содержит область Ω_1 , то наименьшее и последующие собственные значения оператора L_2 , предшествующие нижней грани его непрерывной части спектра, а также сама эта нижняя грань не могут быть больше одноименных величин для оператора L_1 .

Доказательство вытекает непосредственно из минимаксимального принципа, леммы 13 п° 19 и результатов п° 3. Вопрос о строгом убывании наименьшего собственного значения при расширении области, решенный положительно для ограниченных областей в [64 (1)], остается в условиях леммы 2, когда области могут быть неограниченными, открытым.

47. О признаках полуограниченности и дискретности спектра многомерных краевых задач. Простейший признак такого рода дает следующее предложение, непосредственно вытекающее из теоремы 1 предыдущего пункта.

Теорема 3 [97 (1)]. Если

$$\lim_{|OP| \rightarrow \infty} q(P) = \infty,$$

то спектр оператора $L = L^*$ ограничен снизу и дискретен.

Получение более тонкого критерия, соответствующего одномерной теореме 6 п° 28, вызывает значительные осложнения, связанные с отсутствием для функций многих переменных аналога неравенства

$$\int_{\Omega_k} |y^2(x) - y^2(x_k)| dx \leq \omega \int_{\Omega_k} (y'^2 + y^2) dx, \quad (17)$$

использованного в п° 28. В уже цитированной статье [70] А. М. Молчанову удалось вместе с признаком дискретности спектра одномерного оператора Шредингера получить его многомерное обобщение для оператора (1) в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E}_m)$ при любом $m > 1$.

Для формулировки результата А. М. Молчанова напомним определение М. В. Келдыша [51 (1)] емкости множества.

Пусть F есть замкнутое ограниченное множество в $\mathcal{E}_m$, а μ — вполне аддитивная положительная мера, задающая распределение зарядов на F . Через $u(P)$ обозначим потенциал поля этих зарядов, так что

$$u(P) = \int_F \frac{d\mu(Q)}{|PQ|^{m-2}}.$$

Емкостью $C(F)$ множества F называется максимальный суммарный заряд, для которого $u(P) \leq 1$, то есть

$$C(F) = \sup_{u \leq 1} \int_F d\mu(Q).$$

Назовем, далее, множество F , расположенное в кубе $R \subset \mathcal{E}_m$ с ребром ω , несущественным вырезом этого куба, если его емкость удовлетворяет неравенству

$$C(F) \leq \frac{|\omega|^{m-2}}{(4m)^{4m}}.$$

Результат А. М. Молчанова состоит в том, что в случае ограниченности снизу потенциала $q(P)$ для дискретности спектра оператора Шредингера в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E}_m)$ необходимо и достаточно, чтобы

было

$$\int_{R-F} q(P) dP \rightarrow \infty, \quad (18)$$

когда куб R , сохраняя размер, уходит в бесконечность, а вырез F изменяется произвольно, оставаясь несущественным.

Подробное доказательство этой теоремы имеется в [70].

Рассмотрим теперь вопрос о спектре оператора L , порождаемого операцией (1) в некоторой бесконечной области $\Omega \subset \mathbb{E}$ с границей S и краевым условием $u = 0$ на этой границе. При этом будем считать потенциал ограниченным снизу, так что $L = L^*$.

В ближайших рассмотрениях число измерений пространства $\mathbb{E}_m$ будет несущественным, и можно для простоты принять $m = 3$.

Пусть некоторая плоскость E делит область Ω на конечную и бесконечную части. Обозначим линию пересечения плоскости E с поверхностью S через Γ , а часть плоскости E , ограничиваемую этой линией, — через R . Оператор L индуцирует естественным образом регулярную краевую задачу в ограниченной двумерной области R . Если плоскость E задана уравнением $z = z_0$, то индуцированная краевая задача определяется операцией

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + q(x, y, z_0)u$$

с краевым условием

$$u(x, y)|_{(x, y) \in \Gamma} = 0.$$

Лемма 3 [40]. Пусть $\lambda(a)$ есть первое собственное значение краевой задачи, индуцированной оператором L в сечении области Ω плоскостью $z = a$, и

$$\alpha < \liminf_{a \rightarrow \infty} \lambda(a).$$

При этих условиях часть спектра оператора L , лежащая левее точки α , ограничена снизу и дискретна.

Доказательство. Обозначим через Ω_a бесконечную часть области Ω , отсекаемую от нее плоскостью $z = a$, и пусть L_a есть самосопряженный оператор, порождаемый в $\mathcal{L}_2(\Omega_a)$ операцией (1) с нулевым краевым условием на полной границе области Ω_a .

Выберем число N так, чтобы при $a > N$ было $\alpha < \lambda(a)$, и покажем, что самосопряженный оператор L_a не имеет точек спектра левее α . Предположив противное, найдем функцию $u \in \mathfrak{D}_{L_a}$, для которой скалярное произведение $([L_a - \alpha I]u, u)$ отрицательно, то есть

$$\int_N^\infty dz \int_{E_z} \{ |\nabla u|^2 + (q - \alpha) u^2 \} dx dy < 0, \quad (19)$$

где E_z есть пересечение горизонтальной плоскости, отсекающей на оси Oz отрезок z , с областью Ω . Из (19) следует, что при некотором значении $z > N$ будет

$$\int_{E_z} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + (q - \alpha) u^2 \right\} dx dy < 0$$

и, тем более,

$$\int_{E_z} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + (q - \alpha) u^2 \right\} dx dy < 0. \quad (20)$$

Из неравенства (20) вытекает, что первое собственное значение краевой задачи, индуцированной оператором $L - \alpha I$ в области E_z , отрицательно, а это противоречит выбору числа N .

Теперь из принципа расщепления следует, что часть спектра оператора L , расположенная левее точки α , ограничена снизу и дискретна.

Из доказанной леммы для случая $q(P) \equiv 0$ вытекает следующий признак Ф. Реллиха [83 (4)] дискретности спектра оператора Лапласа (см. также [40]).

Теорема 4 [83 (4)]. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{E}_m$ неограниченно сужается в том смысле, что при удалении в бесконечность гиперплоскости E , перпендикулярной к некоторому направлению, первое собственное значение краевой задачи, индуцированной в $\Omega \cap E$ оператором $-\Delta$ с нулевым краевым условием, стремится к бесконечности.

Тогда спектр в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ оператора $-\Delta$ с нулевым краевым условием на границе области Ω ограничен снизу и дискретен.

Доказательство исчерпывается ссылкой на лемму 3.

Признак, устанавливаемый теоремой 4, не является необходимым. Необходимое и достаточное условие дискретности спектра лапласиана в бесконечной области получено А. М. Молчановым в [70].

Для областей с гладкой границей (например, достаточно считать ограниченной кривизну границы) критерий А. М. Молчанова состоит в том, что область Ω при сколь угодно малом $r > 0$ должна содержать лишь конечное число непересекающихся сфер радиуса r . Естественно предполагать, что при выполнении условия А. М. Молчанова собственные значения оператора Лапласа тем быстрее будут стремиться к бесконечности, чем медленнее растет при $r \rightarrow 0$ функция $n(r)$, равная максимальному числу непересекающихся сфер радиуса r , которое способна вместить область Ω . Однако соответствующие асимптотические оценки неизвестны. Один частный случай области, удовлетворяющей условиям теоремы 4, рассмотрен в конце п° 50. При $\Omega = \mathbb{E}$ и $q(P) \rightarrow \infty$ асимптотические формулы получены в [95 (2)] и [61 (2)].

В заключение этого пункта остановимся еще на вопросе о применении метода расщепления к так называемым вырождающимся эллиптическим уравнениям.

Пусть

$$l[y] = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y} p(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (21)$$

где

$$p(x, y) \geq p_0(y) > 0$$

при $y > 0$, но при $y \rightarrow 0$ может быть $\lim p(x, y) = 0$. Через Ω обозначим ограниченную область, лежащую в верхней полуплоскости и примыкающую к оси абсцисс вдоль отрезка $a \leq x \leq b$. Для простоты примем, что дополнительная к этому отрезку часть границы определяется уравнением $y = \vartheta(x)$, и будем считать $\vartheta(x) \leq 1$. Зададим на границе области Ω , за исключением отрезка $a \leq x \leq b$, краевое условие $u(x, y) = 0$ и через L обозначим замыкание симметрического оператора, определяемого в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ операцией (21) на достаточно гладких функциях, удовлетворяющих заданному краевому условию и исчезающих вблизи оси абсцисс.

Оператор $L + I$, очевидно, положительно определен и, следовательно, либо самосопряжен, либо допускает единственное жесткое расширение $\dot{L} + I$. Достаточным условием ограниченности снизу и дискретности спектра $S(\dot{L})$ является, в силу теоремы 41^{bis} п° 19, существование при любом $\mu > 0$ такого числа δ , чтобы на всех функциях $u \in \mathfrak{D}_L$, исчезающих вблизи оси абсцисс и при $y > \delta$, было

$$\mu \int_{\Omega} u^2 dx dy < \int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy. \quad (22)$$

Следующая теорема, принадлежащая С. Г. Михлину, показывает, что если $p(x, y)$ не слишком быстро стремится к нулю при $y \rightarrow 0$, то $S(\dot{L}) = D(\dot{L})$.

Теорема 5 [69 (2)]. Если миноранта $p_0(y)$ функции $p(x, y)$ удовлетворяет условию

$$\int_0^1 \frac{y dy}{p_0(y)} < \infty, \quad (23)$$

то спектр неотрицательного самосопряженного оператора $\hat{L}$ дискретен.

Доказательство. Следуя М. Ш. Бирману, для получения оценки вида (22) отправляемся от представления любой функции $u \in \mathfrak{D}_L$, исчезающей вблизи оси абсцисс и при $y > \delta$, в виде

$$u(x, y) = - \int_y^\delta \frac{\partial u}{\partial y} dy,$$

откуда получаем

$$\begin{aligned} u^2(x, \beta) &\leq \int_\beta^\delta p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy \int_\beta^\delta \frac{dt}{p_0(t)} \leq \\ &\leq \int_\beta^\delta \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dy \int_\beta^\delta \frac{dt}{p_0(t)}. \end{aligned}$$

Далее, интегрируя обе части этого неравенства по пересечению S_β области Ω с прямой $y = \beta$, получаем

$$\int_{S_\beta} u^2(x, \beta) dx \leq \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \int_\beta^\delta \frac{dt}{p_0(t)}.$$

Наконец, интегрируя обе части последнего неравенства по β от 0 до δ , получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_\delta} u^2(x, y) dx dy &\leq \\ &\leq \int_0^\delta d\beta \int_\beta^\delta \frac{dt}{p_0(t)} \int_\Omega \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + p \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy, \quad (24) \end{aligned}$$

где Ω_δ есть часть области Ω , расположенная ниже прямой $y = \delta$.

Сравнивая соотношение (24) с неравенством (22), видим, что для дискретности спектра $S(\hat{L})$ достаточно выполнения предельного соотношения

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^\delta d\beta \int_\beta^\delta \frac{dt}{p_0(t)} = 0,$$

то есть сходимости интеграла

$$\int_0^{\delta} d\beta \int_{\beta}^{\delta} \frac{dt}{p_0(t)} = \int_0^{\delta} \frac{dt}{p_0(t)} \int_0^t d\beta = \int_0^{\delta} \frac{t dt}{p_0(t)},$$

которая имеет место в силу (23).

48. Отрицательная часть спектра и узловые линии решений эллиптических уравнений. Результаты п° 30 допускают обобщение на многомерный случай. В частности, следующее предложение соответствует признаку осцилляторности Кнезера для обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 6 [31 (10)]. Пусть

$$\tilde{q}(r) = \min_{|OP|=r} q(P), \quad \hat{q}(r) = \max_{|OP|=r} q(P).$$

Если

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} r^2 \tilde{q}(r) > -\frac{(m-2)^2}{4}, \quad (25)$$

то $L = L^*$ и отрицательная часть спектра $S(L)$ состоит из конечного числа собственных значений конечной кратности.

Если

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} r^2 \hat{q}(r) < -\frac{(m-2)^2}{4}, \quad (26)$$

то отрицательная часть любого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L не исчерпывается конечным множеством собственных значений конечной кратности.

Доказательство. Если условие (25) выполнено, то оператор L полуограничен и, следовательно, $L = L^*$.

Положив в соотношении (9) п° 26 $\alpha = m - 3$, $x = r$, получим для любой финитной функции $u \in \mathfrak{D}_L$ при фиксированных угловых координатах неравенство

$$\int_R^\infty r^{m-3} u^2 dr \leq \frac{4}{(m-2)^2} \int_R^\infty r^{m-1} \left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)^2 dr.$$

Далее, интегрируя обе его части по угловым координатам и заменяя $\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2$ на $|\nabla u|^2$, получаем

$$\int_{\Omega} r^{-2} u^2 d\omega \leq \frac{4}{(m-2)^2} \int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 d\omega$$

или

$$\int_{\Omega_R} \left\{ |\nabla u|^2 - \frac{(m-2)^2}{4r^2} u^2 \right\} d\omega \geq 0, \quad (27)$$

где $m \geq 2$.

Пользуясь условием (25), выберем положительные числа δ и R так, чтобы при $r \geq R$ было

$$q(P) > -\frac{(m-2)^2 - \delta}{4r^2},$$

и выберем число $k > 0$, удовлетворяющее неравенству

$$\frac{(m-2)^2 - \delta}{(m-2)^2} < k < 1.$$

Для доказательства первой части теоремы достаточно установить неравенство

$$\int_{\mathcal{E}_m} \{ |\nabla u|^2 + q(P) |u|^2 \} d\omega \geq 0$$

на многообразии всех финитных функций $u \in \mathfrak{D}_L$, ортогональных к некоторому конечномерному подпространству F в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E}_m)$.

Выберем число μ так, чтобы при $|OP| < R$ было

$$\mu + q(P) + \frac{1-\delta}{4r^2} > 0,$$

и введем в рассмотрение регулярную краевую задачу для $-\Delta$ в шаре $|OP| \leq R$ с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на его границе. Через F обозначим линейную оболочку всех собственных функций этой задачи, соответствующих собственным значениям, меньшим $\frac{\mu}{1-k}$, и продолженных за сферу $|OP| = R$ тождественным нулем.

При таком выборе F для всех функций $u \in \mathfrak{D}_L$, ортогональных к F , будет

$$\int_{|OP| \leq R} \{ (1 - k) |\nabla u|^2 - \mu |u|^2 \} d\omega \geq 0.$$

С другой стороны, в силу (27), имеем

$$\begin{aligned} \int_{|OP| \leq R} \left(k |\nabla u|^2 - \frac{(m-2)^2 - \delta}{4r^2} |u|^2 \right) d\omega + \\ + \int_{|OP| \geq R} \left(k |\nabla u|^2 - \frac{(m-2)^2 - \delta}{4r^2} |u|^2 \right) d\omega > 0. \end{aligned}$$

Складывая левые части двух последних неравенств, получаем для любой финитной функции $u \in \mathfrak{D}_L$, ортогональной к F , неравенство

$$\begin{aligned} \int_{|OP| \leq R} \left\{ |\nabla u|^2 - \left(\mu + \frac{(m-2)^2 - \delta}{4r^2} \right) |u|^2 \right\} d\omega + \\ + \int_{|OP| \geq R} \left\{ k |\nabla u|^2 - \frac{(m-2)^2 - \delta}{4r^2} |u|^2 \right\} d\omega \geq 0, \end{aligned}$$

из которого, в силу указанного выбора чисел δ , R и μ , следует требуемое соотношение

$$\int_{\mathfrak{E}_m} \{ |\nabla u|^2 + q(P) |u|^2 \} d\omega \geq 0.$$

Переходя к доказательству второй части теоремы, преобразуем выражение квадратичного функционала

$$\hat{\Phi}[u] = \int_{\mathfrak{E}_m} \{ |\nabla u|^2 + \hat{q} |u|^2 \} d\omega$$

к сферическим координатам и заменим переменные по формуле (10). При этом будем считать функцию $v(P) = v(r)$ R -финитной. Таким образом, получим

$$\hat{\Phi}[u] = C_m \int_R^\infty \left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 + \left[\hat{q}(r) + \frac{(m-2)^2 - 1}{4r^2} \right] v^2 \right\} dr, \quad (28)$$

где постоянная C_m есть площадь поверхности единичной сферы в $\mathfrak{E}_m$.

Правая часть (28) определяет в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ квадратичный функционал

$$F[v] = \int_0^\infty \left\{ \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|^2 + \tilde{q}(r) |v|^2 \right\} dr,$$

где

$$\tilde{q}(r) = \hat{q}(r) + \frac{(m-2)^2 - 1}{4r^2}. \quad (29)$$

При этом, в силу (26), при больших r выполняется соотношение

$$\tilde{q}(r) < -\frac{1+\delta}{4r^2},$$

которое (теорема 9 п° 30) является условием осцилляторности для одномерной операции

$$-\frac{d^2 v}{dr^2} + \tilde{q}(r) v.$$

Поэтому существует бесконечная последовательность $\{v_n(r)\}$ финитных функций с непересекающимися носителями, для которой будет $F[v_n] < 0$. Полагая

$$u_n(P) = r^{\frac{1-m}{2}} v_n(r),$$

получаем

$$(Lu_n, u_n) \leq \int_{\mathbb{S}_m} \{ |\nabla u_n|^2 + \hat{q} |u_n|^2 \} d\omega = C_m F[v_n] < 0,$$

откуда следует, что отрицательная часть любого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L не может исчерпываться конечным множеством собственных значений конечной кратности. Теорема доказана.

Из второй части приведенного доказательства следует, что все одномерные признаки бесконечности множества точек отрицательной части спектра (теоремы 11—14 п° 30) переносятся на многомерный случай, если в них положить $n=2$ и заменить потенциал $q(x)$ функцией $\tilde{q}(r)$, определяемой формулой (29).

Если функция $u(P)$ является решением уравнения

$$-\Delta u + q(P) u = 0 \quad (30)$$

в ограниченной (не обязательно односвязной) области $\omega \subset \mathbb{E}_m$, непрерывна вплоть до границы Γ этой области и равна

нулю на этой границе, то границу Γ назовем *узловым контуром* решения $u(P)$.

Как и в одномерном случае, имеется некоторая связь между характером отрицательной части спектра и узловыми контурами решения уравнения (30). Назовем уравнение (30) *неосцилляторным*, если при некотором R в области $|OP| > R$ его решения не имеют узловых контуров. В противном случае, когда при любом R существуют решения с узловыми контурами в области $|OP| > R$, уравнение (30) назовем *осцилляторным*. Простейший пример неосцилляторного уравнения получим в случае финитного потенциала, ибо тогда в некоторой области $|OP| > R$ решения уравнения (30) будут гармоническими функциями.

Теорема 7. *При условии (25) уравнение (30) неосцилляторно, а при условии (26) оно осцилляторно.*

Доказательство. Без ограничения общности положим $m = 2$.

Если выполнено условие (25), то, согласно теореме 6, отрицательная часть спектра самосопряженного оператора L исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности.

Если бы утверждение о неосцилляторности было неправильным, то существовала бы бесконечная последовательность финитных функций $\{\psi_k(P)\}$ с непересекающимися носителями ω_k , ограниченными узловыми контурами Γ_k , для которой

$$\Delta\psi_k - q(P)\psi_k = 0 \quad (P \in \omega_k; k = 1, 2, \dots). \quad (31)$$

Равенство (31) означает, что $\lambda_k = 0$ и $\psi_k(P)$ суть собственное значение и соответственно собственная функция краевой задачи, определяемой в $\mathcal{L}_2(\omega_k)$ операцией (1) с краевым условием $u(P)|_{P \in \tilde{\Gamma}_k} = 0$.

Рассмотрим вместе с этой задачей другую краевую задачу, которая определяется той же операцией (1) в $\mathcal{L}_2(\tilde{\omega}_k)$ с краевым условием $u(P)|_{P \in \tilde{\Gamma}_k} = 0$, где $\tilde{\Gamma}_k$ есть полная граница некоторой области $\tilde{\omega}_k \supset \omega_k$, отличающейся от ω_k настолько мало, чтобы при $j \neq k$ было $\tilde{\omega}_j \cap \tilde{\omega}_k \neq \emptyset$ ($j, k = 1, 2, \dots$).

На основании теоремы, сформулированной Р. Курантом [54] и доказанной Ю. И. Любичем [64(1)], при переходе от ω_k к области $\tilde{\omega}_k \supset \omega_k$ каждое собственное значение строго уменьшается. Отсюда следует существование

бесконечной системы $\{\tilde{\psi}_k(P)\}$ финитных функций с непересекающимися носителями $\tilde{\omega}_k$, удовлетворяющих уравнению

$$-\Delta \tilde{\psi}_k + q(P) \tilde{\psi}_k = \lambda_k \tilde{\psi}_k \quad (P \in \tilde{\omega}_k),$$

где

$$\lambda_k < 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

так что имеем

$$(l[\tilde{\psi}_k], \tilde{\psi}_k) < 0.$$

Сглаживая теперь функции $\tilde{\psi}_k(P)$ на узловых контурах $\tilde{\Gamma}_k$ с помощью леммы 13 п° 19, получим бесконечную систему финитных функций $\{\varphi_k(P)\}$ с непересекающимися носителями $\tilde{\omega}_k$, которые принадлежат $\mathfrak{D}_L$ и удовлетворяют неравенству

$$(L\varphi_k, \varphi_k) < 0 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Отсюда следует бесконечность множества точек отрицательной части спектра $S(L)$, что противоречит условию (25).

Пусть теперь дано неравенство (26). Как установлено при доказательстве второй части теоремы 6, из этого неравенства следует при любом достаточно большом R существование R -финитной функции $u(P) \in \mathfrak{D}_L$, для которой

$$(Lu, u) < 0. \quad (32)$$

Если $u(P) = 0$ при $|OP| > \rho$, то из неравенства (32) следует отрицательность первого собственного значения $\lambda(\rho)$ краевой задачи, определяемой операцией (1) в кольце $R \leq |OP| \leq \rho$ с нулевым краевым условием на его границе. Так как при уменьшении ρ до $\rho = R$ собственное значение $\lambda(\rho)$ возрастает непрерывно [54] до $+\infty$, то при некотором $\rho = R_1$ будет $\lambda(\rho) = 0$. Тогда соответствующая собственная функция будет искомым решением, имеющим узловой контур в области $|OP| > R$.

В первой части приведенного доказательства установлено несколько больше, чем указано в формулировке теоремы, а именно, показано, что неосцилляторность следует из конечности отрицательной части спектра оператора $\tilde{L}$.

Аналогичное усиление второй части теоремы при $m \geq 2$ без дополнительных предположений невозможно: из бесконечности множества точек отрицательной части спектра некоторого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L не следует осцилляторность уравнения (30). Остается, однако, открытым вопрос об указанном усилении второй части теоремы при дополнительном предположении о том, что множество точек отрицательной части спектра лю-

бого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ оператора L бесконечно. Этот же вопрос остается также открытым даже при дополнительном требовании $L = L^*$ (см. конец п° 19).

49. Характер непрерывной части спектра в зависимости от поведения потенциала и вида бесконечной области. Для удобства формулировки теорем этого пункта примем следующую классификацию областей пространства $\mathcal{E}_m$.

Пусть $\dot{\Omega}$ означает любую (связную или несвязную) область пространства. Область $\dot{\Omega}$ назовем *квазиконической*, если она содержит сферы любого радиуса. Если область $\dot{\Omega}$ не является квазиконической, но содержит бесконечное множество одинаковых непересекающихся сфер, то назовем ее *квазицилиндрической*. В частности, квазицилиндрической областью является само это множество сфер. Если, наконец, область $\dot{\Omega}$ не содержит и такого множества сфер, то будем называть ее *квазиограниченной*. Очевидно, любая область $\dot{\Omega} \subset \mathcal{E}_m$ принадлежит одному из определенных выше типов.

Приводимые ниже признаки относятся к непрерывной части спектра любого самосопряженного расширения $\tilde{L}$ симметрического оператора L . Оператор $\tilde{L}$ может порождаться операцией (1) во всем пространстве $\mathcal{E}_m$ или в произвольной его части Ω , содержащей область $\dot{\Omega}$ с любыми краевыми условиями на границе этой части. При этом на поведение потенциала $q(P)$ вне $\dot{\Omega}$ никаких ограничений, кроме непрерывной дифференцируемости, не накладывается.

Не ограничивая общности, будем считать $m = 3$ и использовать в качестве пробных систем финитных функций с непересекающимися носителями функции

$$u_j(P) = u_j(P; \lambda, \eta) = \varphi(x - \alpha_j; \lambda, \eta) \varphi(y - \beta_j; 0, \eta) \varphi(z - \gamma_j; 0, \eta). \quad (33)$$

Здесь функция $\varphi(x; \lambda, \eta)$ определена равенством (73) п° 31, так что при всех натуральных j будет

$$\|u_j(P; \lambda, \eta)\| = 1, \quad \max_{P \in \mathcal{E}} |u_j(P; \lambda, \eta)| = \varepsilon^{\frac{3}{2}} \quad (34)$$

и

$$\|\Delta u_j + \lambda u_j\| < \varepsilon; \quad (35)$$

при этом, очевидно, функции (33) входят в область определения $\mathfrak{D}_{\tilde{L}}$ любого расширения оператора L .

Теорема 8 [31 (4)]. Если область $\dot{\Omega}$ квазиконическая и

$$\omega = \lim_{|OP| \rightarrow \infty} \sup q(P) - \lim_{|OP| \rightarrow \infty} \inf q(P) \quad (P \in \dot{\Omega}),$$

то при больших λ будет

$$[\lambda, \lambda + \omega] \cap C(\tilde{L}) \neq \emptyset.$$

Если, в частности,

$$\lim_{|OP| \rightarrow \infty} q(P) = 0 \quad (P \in \dot{\Omega}),$$

то

$$[0, \infty) \subset C(\tilde{L}).$$

Доказательство. Так как область $\dot{\Omega}$ является квазиконической, то при любом $\eta > 0$ можно в (33) выбрать точку $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ так, чтобы при всех натуральных j носители финитных функций $u_j(P)$ лежали внутри $\dot{\Omega}$ и не пересекались. Далее, при заданном $\delta > 0$ выберем число $N = N_\delta$ так, чтобы при $P \in \dot{\Omega}$ было

$$\sup_{|OP| > N} q(P) - \inf_{|OP| > N} q(P) < \omega + \delta.$$

Считая

$$\lambda > \frac{1}{2} \left\{ \lim_{|OP| \rightarrow \infty} \sup q(P) - \lim_{|OP| \rightarrow \infty} \inf q(P) \right\} \quad (P \in \dot{\Omega}),$$

получаем, как при доказательстве теорем 17 и 19 п°31, для всех функций системы (33), начиная с некоторой, неравенства

$$\|Lu_j - \lambda u_j\| \leq (\eta + \omega + \delta) \|u_j\|.$$

Из полученного неравенства, в силу произвольности величин $\eta > 0$ и $\delta > 0$, следует первое утверждение теоремы. Второе утверждение теоремы непосредственно вытекает из первого.

Теорема 9 [31 (4)]. Если в некоторой квазиконической области $\dot{\Omega}$ при любом $\delta > 0$ выполняется условие

$$\int_{M_\delta} |q(P)|^2 d\omega < \infty,$$

где M_δ есть множество точек $P \in \dot{\Omega}$, для которых $|q(P)| \geq \delta$, то положительная часть спектра оператора $\tilde{L}$ покрывает всю полуось $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Выбирая при фиксированном $\lambda > 0$ и произвольном $\eta > 0$ точку $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ в (33) так, чтобы при всех натуральных j носители финитных функций $u_j(P)$ лежали внутри $\dot{\Omega}$ и не пересекались, получаем, как ранее в п° 31,

$$\|\tilde{L}u_j - \lambda u_j\| \leq \eta \|u_j\| + \|qu_j\| \leq \eta \|u_j\| + \\ + \left\{ \int_{\Omega - M_\delta} |q(P) u_j(P)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_{M_\delta} |q(P) u_j(P)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}} \leq \rho(\varepsilon, \delta) \|u_j\|,$$

где

$$\rho(\varepsilon, \delta) = \eta + \delta + \varepsilon^{\frac{3}{2}} \left\{ \int_{M_\delta} |q(P)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как величина $\rho(\varepsilon, \delta)$ может быть сделана сколь угодно малой вместе с $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$, то будет $\lambda \in C(\tilde{L})$, что и требовалось доказать.

Теорема 10. Если для некоторой последовательности кубов Q_j с ребрами Δ_j неограниченно растущей длины $|\Delta_j| = \sqrt[3]{|Q_j|}$ выполнено предельное соотношение

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} |q(P)|^2 d\omega = 0,$$

то положительная часть спектра оператора $\tilde{L}$ покрывает всю полуось $\lambda \geq 0$.

Доказательство. Положив в формуле (73) п° 31

$$\varepsilon = \varepsilon_j = \frac{1}{2|\Delta_j|}$$

и приняв в (33) в качестве точек $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ центры кубов Q_j , получим, как при доказательстве теоремы 22 п° 31, для нормированных функций $u_j(P)$ неравенство

$$\|Lu_j - \lambda u_j\| \leq \eta_j \|u_j\| + \|qu_j\| \leq \eta_j + \left\{ \frac{1}{8|Q_j|} \int_{Q_j} |q(P)|^2 d\omega \right\}^{\frac{1}{2}},$$

так что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\tilde{L}u_j - \lambda u_j\| = 0,$$

откуда следует требуемое включение $\lambda \in C(\tilde{L})$.

Теорема 11 [31(4)]. *Если в некоторой квазицилиндрической области $\dot{\Omega}$ потенциал $q(P)$ ограничен, то для больших λ длина лакун в $C(\tilde{L})$ с центром в точке λ не превышает $O(\sqrt{\lambda})$.*

Доказательство. Так как область $\dot{\Omega}$ является квазицилиндрической, то при некотором ϵ можно выбрать точки $(\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ так, чтобы при любом натуральном j носители финитных функций (33) лежали внутри $\dot{\Omega}$ и не пересекались.

С помощью формул (73) п°31 и (33) легко получаем при $\lambda > \lambda_0$ для всех натуральных j неравенство

$$\|Lu_j - \lambda u_j\| < (\alpha \sqrt{\lambda} + \beta) \|u_j\|,$$

из которого следует справедливость теоремы. Заметим, что числа λ_0 , α , β не зависят от выбора расширения.

Примечание. Применение той же пробной системы функций (33) к случаю обычной цилиндрической области с любой направляющей приводит к замене $O(\sqrt{\lambda})$ на $O(1)$.

Как и в одномерном случае, для оператора $\dot{L}$ в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E}_m)$ имеют место следующие альтернативы.

Теорема 12. *Если оператор L , определяемый операцией (1) в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E}_m)$, устойчиво положителен, то либо у самосопряженного оператора L нет непрерывного спектра, либо он простирается в бесконечность с лакунами длины не более $O(\sqrt{\lambda})$.*

При тех же условиях точка $\lambda = 0$ либо не принадлежит $C(L)$, либо $[0, \infty) \subset C(L)$.

Доказательство обеих утверждений не отличается от приведенного в п°32.

Дальнейшие теоремы этого пункта посвящены исследованию спектра оператора Лапласа. При этом через $-\tilde{\Delta}$ обозначается самосопряженный оператор в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, определяемый операцией $-\Delta$ с нулевым краевым условием на границе области Ω .

Для случая лапласиана имеет место следующая альтернатива.

Теорема 13 [31 (4)]. *Какова бы ни была область $\Omega \subset \mathbb{E}_m$ с достаточно гладкой границей, непрерывная часть спектра оператора $-\tilde{\Delta}$ либо отсутствует, либо простирается в бесконечность с лакунами длины не более $O(\sqrt{V})$.*

Доказательство. Если область Ω квазиконическая или квазицилиндрическая, то, в силу теорем 9 и 12, непрерывный спектр будет простирается в бесконечность, заполняя сплошь полуось $\lambda \geq 0$ или имея лакуны длины не более $O(\sqrt{V})$.

Если же область Ω не является ни квазиконической, ни квазицилиндрической, то она квазиограниченная. Но тогда при условии достаточной гладкости границы спектр оператора $-\tilde{\Delta}$ будет дискретным по теореме А. М. Молчанова [70], упомянутой ранее в связи с теоремой 4. Теорема доказана.

Пусть теперь $\Omega \subset \mathbb{E}$ есть полубесконечный цилиндр с ограниченным основанием, лежащим в плоскости $z=0$, и образующими, параллельными оси z . В этом простом случае спектр $S(-\tilde{\Delta})$ легко находится с помощью разделения переменных. При этом оказывается, что $D(-\tilde{\Delta})=0$, а $S(-\tilde{\Delta})=C(-\tilde{\Delta})=[0, \infty)$, где α есть первое собственное значение индуцированной краевой задачи в сечении $z=z_0$.

Тот же результат получается при замене нулевого краевого условия на основании цилиндра условием $\frac{\partial u}{\partial n}=0$.

Если с помощью финитной деформации перейти от цилиндра Ω к некоторой области Ω' , то непрерывная часть спектра не изменится, но вне $C(-\tilde{\Delta})$ и на $C(-\tilde{\Delta})$ могут появиться собственные значения. В силу леммы 1 число собственных значений, появившихся вне $C(-\tilde{\Delta})$, будет конечным. Но каким будет множество собственных значений, появившихся на $C(-\tilde{\Delta})$? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема Джонса.

Теорема 14 [40]. *Дискретная часть спектра оператора $-\tilde{\Delta}$ в области, полученной из цилиндра с помощью финитной деформации, состоит из изолированных собственных значений конечной кратности с единственной возможной предельной точкой $\lambda = +\infty$.*

Доказательство. Очевидно, оператор $-\tilde{\Delta}$ не отрицательный, так что его дискретный спектр $D(-\tilde{\Delta})$ расположен на полуоси $\lambda \geq 0$.

Обозначим через $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \alpha_3, \dots$ последовательные собственные значения краевой задачи, индуцированной оператором $-\tilde{\Delta}$ в поперечном сечении цилиндрической части данной области Ω . Не ограничивая общности, будем считать спектр этого индуцированного оператора простым, так что

$$0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots$$

Соответствующие собственные функции пусть будут

$$w_1(x, y), w_2(x, y), \dots$$

Далее выберем число a настолько большим, чтобы плоскость $z = a$ делила Ω на ограниченную часть ω и бесконечную цилиндрическую часть Ω_a .

Через

$$\lambda'_1 \leq \lambda'_2 \leq \lambda'_3 \leq \dots$$

обозначим последовательные собственные значения лапласиана в ω с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ при $z = a$ и нулевым краевым условием $u = 0$ на остальной части границы области ω . Соответствующие собственные функции обозначим через

$$\psi_1(P), \psi_2(P), \psi_3(P), \dots \quad (36)$$

Сначала покажем, что левее точки α_1 спектр оператора $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности. С этой целью отметим, что оператор $-\tilde{\Delta}_a$ в $\mathcal{L}_2(\Omega_a)$ с краевым условием $\frac{\partial u}{\partial z} = 0$ при $z = a$ и нулевым краевым условием на остальной части границы области Ω_a не имеет никаких точек спектра левее α_1 .

Действительно, предположив противное, найдем функцию $u \in \mathfrak{D}_{\tilde{\Delta}_a}$, для которой будет

$$\int_a^\infty dz \int_{E_z} \{ |\nabla u|^2 - \alpha_1 |u|^2 \} dx dy < 0,$$

где E_z есть пересечение горизонтальной плоскости, отсекающей на оси Oz отрезок z , с областью Ω . Но тогда при некотором $z > a$ будет

$$\int_{E_z} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \alpha_1 u^2 \right\} dx dy < 0$$

и, тем более,

$$\int_{E_z} \int \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 - \alpha_1 u^2 \right\} dx dy < 0,$$

что невозможно, так как α_1 есть первое собственное значение индуцированной краевой задачи.

Таким образом α_1 является первой точкой спектра оператора $-\tilde{\Delta}_a$, и, пользуясь леммой 1, заключаем, что левее точки α_1 спектр оператора $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ исчерпывается конечным числом собственных значений конечной кратности.

Теперь для доказательства теоремы остается установить, что в каждом из интервалов

$$(\alpha_1, \alpha_2], (\alpha_2, \alpha_3], \dots \quad (37)$$

имеется лишь конечное число собственных значений конечной кратности данного оператора $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Пусть $v(x, y, z)$ есть собственная функция оператора $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$. При фиксированном $z > a$ эту функцию можно представить ортогональным рядом

$$v(x, y, z) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j(z) w_j(x, y), \quad (38)$$

так что при любом n

$$\sum_{j=1}^n |c_j(z)|^2 \leq \int_{E_z} |v(x, y, z)|^2 dx dy$$

и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^n \int_a^{\infty} |c_j(z)|^2 dz \leq \|v\|_{\Omega}^2. \quad (39)$$

С другой стороны, подставляя ряд (38) в соотношение

$$\Delta u + \lambda u = 0, \quad (40)$$

получаем для коэффициентов этого ряда обыкновенные дифференциальные уравнения

$$c_j''(z) + (\lambda - \alpha_j) c_j(z) = 0 \quad (z > a; j = 1, 2, \dots). \quad (41)$$

Если собственное значение λ оператора $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ принадлежит первому из интервалов системы (37), то $\lambda > \alpha_1$.

Но тогда из неравенства (39) и дифференциального уравнения (41) следует, что

$$c_1(z) = 0 \quad (z > a). \quad (42)$$

Теперь уже нетрудно показать, что в интервале $(\alpha_1, \alpha_2]$ не может находиться более n' собственных значений оператора $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, где число n' определено неравенством

$$\lambda'_{n'} \leq \alpha_2 < \lambda'_{n'+1}.$$

Действительно, предположив противное, сможем образовать линейную комбинацию $\varphi(P)$ собственных функций оператора $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, соответствующих собственным значениям из интервала $(\alpha_1, \alpha_2]$, ортогональную в $\mathcal{L}_2(\omega)$ к первым n' функциям системы (36). Для этой функции $\varphi(P)$, очевидно, будет

$$\int_{\omega} \{ |\nabla \varphi|^2 - \alpha_2 |\varphi|^2 \} d\omega \leq 0,$$

то есть

$$\int_{\omega} \{ |\nabla \varphi|^2 - \alpha_2 |\varphi|^2 \} d\omega + \int_{\omega_a} \{ |\nabla \varphi|^2 - \alpha_2 |\varphi|^2 \} d\omega \leq 0. \quad (43)$$

Но из ортогональности $\varphi(P)$ к собственным функциям регулярной задачи $\{\psi_j(P)\}_{j=1}^{n'}$ следует, что первое слагаемое в (43) положительно. Поэтому должно быть

$$\int_a^{\infty} dz \int_{E_z} \{ |\nabla \varphi|^2 - \alpha_2 |\varphi|^2 \} dx dy < 0,$$

а значит, при некотором $z > a$ будет

$$\int_{E_z} \int \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - \alpha_2 |\varphi|^2 \right\} dx dy < 0. \quad (44)$$

С другой стороны, каждая из собственных функций оператора $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$, входящая в состав линейной комбинации $\varphi(P)$, в силу (42) должна быть в $\mathcal{L}_2(E_z)$ ортогональна к $w_1(x, y)$, так что

$$\int_{E_z} \int \varphi(x, y, z) \overline{w_1(x, y)} dx dy = 0. \quad (45)$$

Из соотношений (44) и (45), в силу экстремальных свойств собственных значений, следует, что у индуцированной задачи должно существовать собственное значение внутри интервала (α_1, α_2) . Полученное противоречие показывает несостоятельность предположения о существовании в интервале $(\alpha_1, \alpha_2]$ более n' собственных значений оператора $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$.

Переходя ко второму интервалу системы (37) точно так же, используя вместо одного соотношения (42) два вытекающих из (39) и (40) соотношения

$$c_1(z) \equiv c_2(z) \equiv 0 \quad (z > a),$$

получим, что в интервале $(\alpha_2, \alpha_3]$ может находиться не более n'_2 собственных значений оператора $-\tilde{\Delta}$, где

$$\lambda'_{n'_2} \leq \alpha_3 < \lambda'_{n'_2+1}.$$

Переходя таким образом от каждого интервала системы (37) к следующему, получим полное доказательство теоремы.

Следующая теорема, принадлежащая Ф. Реллиху, показывает, что при некоторых ограничениях на вид границы квазиконической области непрерывная часть спектра лапласиана не несет на себе собственных значений. К таким областям относится, например, часть пространства, заключенная внутри эллиптического параболоида.

Теорема 15 [83 (2)]. Если внешняя нормаль в каждой точке P границы S квазиконической области Ω , расположенной в полупространстве $z > a$ ($a > -\infty$), составляет с положительным направлением оси z угол

$\beta(P) \geq \frac{\pi}{2}$, то на непрерывной части спектра $C(-\tilde{\Delta}) = [0, \infty)$ нет собственных значений оператора $-\tilde{\Delta}$.

Доказательство. Из неотрицательности оператора $-\tilde{\Delta}$ вытекает, что $S(-\tilde{\Delta}) \subset [0, \infty)$, а из теоремы 8 следует, что $[0, \infty) \subset C(-\tilde{\Delta})$. Таким образом,

$$S(-\tilde{\Delta}) = C(-\tilde{\Delta}) = [0, \infty).$$

Для доказательства теоремы достаточно установить, что при $\lambda \geq 0$ уравнение (43) не имеет в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ решения $u(P)$, равного нулю на S и отличного от тождественного нуля в Ω .

Предполагая, что при любом ζ часть области Ω , лежащая между плоскостями $z=a$ и $z=\zeta$, ограничена, обозначим ее через ω_ζ . Далее, ту часть плоскости $z=\zeta$, которая лежит в Ω , обозначим через σ_ζ , а остальную часть границы ω_ζ — через S_ζ .

Теперь докажем, что если функция $u(P)$, не равная нулю тождественно, удовлетворяет уравнению (43) при $\lambda \geq 0$ и обращается в нуль на S , то существуют такое число $\mu > 0$ и последовательность $\zeta_n \rightarrow \infty$, что

$$\int_{\omega_{\zeta_n}} |u(P)|^2 d\omega \geq \mu \zeta_n \quad (46)$$

и, следовательно, $u \in \overline{\mathcal{L}_2(\Omega)}$.

При доказательстве можно считать функцию $u(P)$ вещественной, ибо если $u_1 = \operatorname{Re} u$, $u_2 = \operatorname{Im} u$ и неравенство (46) выполнено для u_1 и u_2 при $\mu = \mu_1$, $\zeta_n = \zeta_n^{(1)}$ и $\mu = \mu_2$, $\zeta_n = \zeta_n^{(2)}$ соответственно, то при $\mu = \min\{\mu_1, \mu_2\}$ будет

$$\int_{\omega_{\zeta_n}^{(1)}} |u_1(P)|^2 d\omega + \int_{\omega_{\zeta_n}^{(2)}} |u_2(P)|^2 d\omega \geq \mu (\zeta_n^{(1)} + \zeta_n^{(2)}),$$

откуда вытекает (46) при $\zeta_n = \zeta_n^{(1)} + \zeta_n^{(2)}$.

Предполагая решение $u(P)$ вещественным, имеем

$$0 = (\Delta u + \lambda u) \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial u^2}{\partial z},$$

откуда, интегрируя по ω_ζ , получаем

$$\int_{\omega_\zeta} \left\{ \operatorname{div} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \nabla u \right] - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} |\nabla u|^2 + \frac{\lambda}{2} \frac{\partial u^2}{\partial z} \right\} d\omega = 0$$

или, если через $\frac{\partial}{\partial n}$ обозначить дифференцирование вдоль внешней нормали к S ,

$$\int_{S_\zeta + \sigma_\zeta} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{1}{2} |\nabla u|^2 \frac{\partial z}{\partial n} + \frac{\lambda}{2} u^2 \frac{\partial z}{\partial n} \right\} d\sigma = 0. \quad (47)$$

Так как, далее, $u(P) = 0$ при $P \in S$, то на S будет $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial n} \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — единичная внешняя нормаль к S . Поэтому соотно-

шение (47) принимает вид

$$\int_{S_\zeta} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma + \int_{\sigma_\zeta} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \lambda u^2 \right\} d\sigma = 0. \quad (48)$$

С другой стороны, так как $\frac{\partial z}{\partial n} \leq 0$ на S , то при $\zeta \geq \zeta_0$ будет

$$-\int_{S_\zeta} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma \geq -\int_{S_{\zeta_0}} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 \frac{\partial z}{\partial n} d\sigma = \rho \geq 0. \quad (49)$$

Выберем число ζ_0 так, чтобы было $\rho > 0$. Это возможно, так как область Ω не является цилиндром и, следовательно, в окрестности некоторой точки на S будет $\frac{\partial z}{\partial n} < 0$. При этом в этой окрестности не всюду будет $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$, ибо, поскольку $u = 0$ на S , то имели бы по теореме единственности [59] $u(P) \equiv 0$ ($P \in \Omega$).

Таким образом, при $\zeta \geq \zeta_0$, в силу (48) и (49), имеем

$$\int_{\sigma_\zeta} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \lambda u^2 \right] d\sigma \geq \rho > 0$$

и, тем более,

$$\int_{\sigma_\zeta} \{ |\nabla u|^2 + \lambda u^2 \} d\sigma \geq \rho > 0,$$

откуда получаем

$$\int_{\omega_\zeta} \{ |\nabla u|^2 + \lambda u^2 \} d\omega \geq \rho (\zeta - \zeta_0). \quad (50)$$

Для того чтобы вывести из полученного соотношения (50) требуемое неравенство (46), введем функцию

$$J(\zeta) = \int_{\sigma_\zeta} u^2 d\sigma$$

и рассмотрим отдельно два случая, когда она при $\zeta \rightarrow \infty$ монотонно возрастает и когда это не имеет места.

В первом случае при всех ζ и некотором $\mu > 0$ будет

$$J(\zeta) > \mu,$$

откуда следует, что

$$\int_{\omega_\zeta} u^2 d\omega > \mu\zeta + C,$$

а это означает выполнение требуемого неравенства (46).

Во втором случае существует последовательность $\zeta_n \rightarrow \infty$ такая, что

$$J'(\zeta_n) = 2 \int_{\sigma_\zeta} u \frac{\partial u}{\partial z} d\sigma \leq 0.$$

Но тогда из тождества

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\omega_\zeta} (\Delta u + \lambda u) u d\omega = \\ &= \int_{\sigma_\zeta} u \frac{\partial u}{\partial z} d\sigma - \int_{\omega_\zeta} |\nabla u|^2 d\omega + \lambda \int_{\omega_\zeta} u^2 d\omega \end{aligned}$$

вытекает

$$\int_{\omega_{\zeta_n}} |\nabla u|^2 d\omega \leq \lambda \int_{\omega_{\zeta_n}} u^2 d\omega,$$

и теперь требуемое неравенство (46) следует из (50).

Т. Като удалось найти подобную неравенству (46) оценку для случая оператора Шредингера с потенциалом $q(P) = o(|OP|)$ и тем самым установить для таких операторов отсутствие собственных значений на непрерывной части спектра (см. п° 65).

50. О дискретной части спектра оператора Лапласа в предельно-цилиндрических областях. Пусть E_0 есть некоторая звездная относительно начала координат область плоскости $z=0$ с границей

$$r = r(\varphi) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi). \quad (51)$$

Область $\Omega \subset \mathbb{E}$, ограниченную в цилиндрических координатах поверхностью

$$r = r(\varphi)(1 + \delta(z)) \quad (0 \leq \varphi < 2\pi, \delta(z) > -1, 0 \leq z < \infty) \quad (52)$$

и конечной частью плоскости $z = 0$, отсекаемой этой поверхностью, назовем *предельно-цилиндрической*, если

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \delta(z) = 0. \quad (53)$$

Обозначим через $-\tilde{\Delta}$ самосопряженный оператор, определяемый в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ операцией $-\Delta$ с нулевым краевым условием на границе области Ω . Далее, через α обозначим первое собственное значение краевой задачи, определяемой двумерной операцией $-\Delta$ в плоской области E_0 с нулевым краевым условием на ее границе (51).

Нетрудно показать, что число α совпадает с нижней гранью α^* непрерывной части спектра оператора $-\tilde{\Delta}$ в предельно-цилиндрической области Ω .

Действительно, левее точки α спектр $S(-\tilde{\Delta})$ дискретен по лемме 3, то есть $\alpha \leq \alpha^*$. С другой стороны, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти число h ($0 < h < 1$) такое, чтобы при $\delta(z) = -h$ первое собственное значение индуцированной в сечении $z = 0$ задачи равнялось бы $\alpha + \varepsilon$. При этом предельно-цилиндрическая область превращается в цилиндр, и в силу (53) для некоторого $z_0 > 0$ часть C_0 этого цилиндра, расположенная выше плоскости $z = z_0$, будет лежать внутри данной предельно-цилиндрической области Ω . Очевидно (см. стр. 245), число $\alpha + \varepsilon$ является первой точкой непрерывной части спектра оператора $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(C_0)$. Но тогда, в силу леммы 2, будет $\alpha^* \leq \alpha + \varepsilon$, откуда при $\varepsilon \rightarrow 0$ получаем $\alpha^* \leq \alpha$.

Теперь, пользуясь леммой 1, заключаем, что при любой финитной деформации цилиндрической области первая точка α непрерывной части спектра оператора $-\tilde{\Delta}$ не является предельной для собственных значений, расположенных левее нее. Поэтому естественно предположить, что при достаточно быстром стремлении функции $\delta(z)$ к нулю левее точки α будет находиться лишь конечное множество точек спектра $S(-\tilde{\Delta})$.

С другой стороны, если в (2) положить $\delta(z) \equiv h$, то при произвольно малом $h > 0$ первая точка непрерывного спектра соответствующего оператора $-\tilde{\Delta}$ окажется левее α , так что числу α будет предшествовать бесконечное множество точек спектра этого оператора. Это обстоятельство дает некоторое основание предполагать, что при достаточно медленном стремлении положительной функции $\delta(z)$ к нулю левее

точки α будет находиться бесконечное множество точек спектра $S(-\tilde{\Delta})$.

Следующую теорему, уточняющую и оправдывающую высказанные выше предположения, можно рассматривать как аналог условий Кнезера осцилляторности одномерной дифференциальной операции второго порядка.

Теорема 16 [32]. Если для предельно-цилиндрической области Ω , определяемой уравнением (52), имеет место соотношение

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \sup z^{2\delta}(z) < \frac{1}{8\alpha}, \quad (54)$$

где α есть первая точка $S(-\tilde{\Delta})$, то левее точки α может находиться лишь конечное число собственных значений оператора $-\tilde{\Delta}$.

Если

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \inf z^{2\delta}(z) > \frac{1}{8\alpha}, \quad (55)$$

то часть спектра $S(-\tilde{\Delta})$, лежащая левее точки α , состоит из бесконечной последовательности собственных значений конечной кратности с единственной предельной точкой $\lambda = \alpha$.

Доказательство. Заменяя в (52) $\delta(z)$ функцией $\mu(z)$, также удовлетворяющей условию $\mu(z) > -1$ и предельному соотношению (53), получим некоторую предельно-цилиндрическую область $\tilde{\Omega}$. Эта область будет ограничена частью плоскости $z = 0$ и поверхностью

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi) [1 + \mu(z)] \\ y &= y(\varphi) [1 + \mu(z)] \end{aligned} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq z < \infty). \quad (56)$$

Не указывая пока способа построения $\mu(z)$ по заданной функции $\delta(z)$, преобразуем область $\tilde{\Omega}$ в цилиндрическую область Z с границами $z = 0$ и

$$\begin{aligned} \xi &= x(\varphi) \\ \eta &= y(\varphi) \end{aligned} \quad (0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq z < \infty)$$

при помощи замены переменных

$$x = [1 + \mu(z)] \xi, \quad y = [1 + \mu(z)] \eta, \quad z = z.$$

При этом, полагая

$$v(\xi, \eta, z) = u(x, y, z),$$

получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial v}{\partial \xi}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{1+\mu} \frac{\partial v}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{x\mu'}{(1+\mu)^2} \frac{\partial v}{\partial \xi} - \frac{y\mu'}{(1+\mu)^2} \frac{\partial v}{\partial \eta}. \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Далее, имея в виду исследовать знак квадратичного функционала

$$\Phi[u] = \int \int \int_{(\tilde{\Omega})} (|\nabla u|^2 - \alpha |u|^2) dx dy dz,$$

оценим снизу и сверху величину $\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$ через частные производные от функции v по новым переменным.

Если для правой части (51) положить

$$R = \max_{0 \leq \varphi < 2\pi} r(\varphi)$$

и ввести обозначение

$$\eta(z) = \frac{R|\mu'|}{(1+\mu)^2}, \quad (58)$$

то из соотношения (57) легко получаем неравенства

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 &\geq \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 (1 - 2\eta) - \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2\right] (\eta + \eta^2), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 &\leq \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 (1 + 2\eta) + \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2\right] (\eta + 2\eta^2). \end{aligned}$$

Эти неравенства вместе с (57) приводят к двусторонней оценке функционала $\Phi[u]$ вида

$$F_1[v] \leq \Phi[u] \leq F_2[v], \quad (59)$$

где

$$\begin{aligned} F_j[v] = \int \int \int_{(Z)} \left\{ q_j(z) \left[\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2 \right] + \right. \\ \left. + p_j(z) \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 - \alpha \rho(z) v^2 \right\} dZ \quad (60) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} q_j(z) &= \begin{cases} 1 - \eta(1 + \mu)^2 - \eta^2(1 + \mu)^2 & (j=1), \\ 1 + \eta(1 + \mu)^2 + 2\eta^2(1 + \mu)^2 & (j=2), \end{cases} \\ p_{1,2}(z) &= (1 \mp 2\eta)(1 + \mu)^2, \quad \rho(z) = (1 + \mu)^2. \end{aligned}$$

Очевидно, для любой финитной и дважды непрерывно дифференцируемой внутри Z функции v , исчезающей на

границе цилиндра Z , квадратичный функционал (60) можно представить в виде

$$F_j[v] = (l_j(v), v),$$

где

$$l_j[v] = -q_j(z) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(p_j(z) \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \alpha p(z) v. \quad (61)$$

Теперь задача сводится к исследованию отрицательной части спектра оператора M , определяемого в $\mathcal{L}_2(Z)$ операцией (61) с нулевым краевым условием на границе цилиндра Z . Так как соответствующая краевая задача допускает разделение переменных, то требуемое исследование не представляет труда.

Полагая

$$v(\xi, \eta, z) = w(\xi, \eta) \zeta(z)$$

в уравнении

$$l_j[v] = \lambda v,$$

получаем

$$-\frac{\frac{d}{dz} \left(p_j \frac{d\zeta}{dz} \right)}{q_j \zeta} = \frac{\Delta w}{w} + \frac{\lambda + \alpha p}{q_j},$$

откуда

$$-\Delta w = k w$$

и

$$-\frac{d}{dz} \left(p_j \frac{d\zeta}{dz} \right) + (k q_j - \alpha p) \zeta = \lambda \zeta. \quad (62)$$

Левая часть (62) вместе с краевым условием $\zeta(0) = 0$ определяет в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ некоторый самосопряженный оператор L_j . Если параметр $k = k_n$ в левой части (62) пробегает множество всех собственных значений двумерного лапласиана $-\Delta$ в поперечном сечении цилиндра Z с нулевым краевым условием, то операторы L_j пробегают некоторую совокупность $\{L_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$. Очевидно, число отрицательных собственных значений оператора M_j равно общему количеству отрицательных собственных значений всех операторов семейства $\{L_{jn}\}_{n=1}^{\infty}$.

Теперь, предполагая выполненным соотношение (54), выберем число z_0 так, чтобы при некотором $\beta > 0$ для любого $z > z_0$ было

$$\delta(z) < \frac{1 - \beta}{8\alpha z^2}.$$

Далее построим на интервале $0 \leq z \leq z_1$, где $z_1 \geq z_0$, такую положительную линейную функцию $az + b$, чтобы функция

$$\mu(z) = \begin{cases} az + b & (0 \leq z < z_1), \\ \frac{1-\beta}{8\alpha z^2} & (z_1 < z) \end{cases} \quad (63)$$

была непрерывна в точке z_1 , а функция $\eta(z)$, определяемая формулой (59), была меньше половины при всех $z \geq 0$ и чтобы область $\tilde{\Omega}$ содержала данную область Ω . Построенную функцию (63) сгладим в окрестности точки z_1 так, чтобы она, сохранив указанные выше свойства, стала непрерывно дифференцируемой в точке z_1 . Эту сглаженную функцию снова обозначим через $\mu(z)$.

При указанном выборе функции $\mu(z)$ в (56) коэффициент $p_1(z)$ в (62) будет при $z \geq 0$ ограничен снизу положительным числом, а при $z \rightarrow \infty$ будет $\lim p_1(z) = 1$. Коэффициент $q_1(z)$ в (62) будет при достаточно большом значении k положительным для всех $z \geq 0$, а при любом k и $z \rightarrow \infty$ он будет иметь вид

$$q_1(z) = k - \alpha - \frac{1-\delta}{4z^2} + O(z^{-3}). \quad (64)$$

Из перечисленных свойств коэффициентов операции (61) без учета (64) следует существование такого $n = n_0$, что при $n \geq n_0$ операторы L_{1n} будут положительны. Так как, далее, при всех n имеем $k_n \geq \alpha$, то из (64) следует, что при больших z коэффициент $q_1(z)$ либо положителен, либо (когда $n = 1$) имеет вид

$$q_1(z) = -\frac{1-\delta}{4z^2} + O(z^{-3}). \quad (65)$$

Поэтому квадратичный функционал $(L_1\zeta, \zeta)$ при всех $n > n_0$ и некотором N будет неотрицательным на всех N -финитных функциях $\zeta \in \mathfrak{D}_{L_1, n}$. Это последнее утверждение при $q_1(z) > 0$ ($z > N$) очевидно, а при $q_1(z)$ вида (65) следует из условия неосцилляторности (39) п° 30. Следовательно, при $1 \leq n < n_0$ каждый из операторов $L_{1, n}$ может иметь лишь конечное число отрицательных собственных значений.

Таким образом, установлено, что оператор M_1 имеет лишь конечное число отрицательных собственных значений. Но тогда, в силу первой части двойного неравенства (59),

оператор $-\tilde{\Delta}$ в предельно-цилиндрической области $\tilde{\Omega}$ будет левее точки α иметь лишь конечное число отрицательных собственных значений. Так как, наконец, $\Omega \supset \tilde{\Omega}$, то по лемме 2 данный оператор $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ будет иметь лишь конечное число собственных значений, меньших α . Таким образом, первая часть теоремы доказана.

Переходя к доказательству второй части теоремы, предположим выполненным соотношение (65) и выберем число z_0 так, чтобы при некотором $\beta > 0$ для любого $z \geq z_0$ было

$$\delta(z) > \frac{1+2\beta}{8\alpha z^2}.$$

Если положить в (56) для $z \geq z_0$

$$\mu(z) = \frac{1+\beta}{8\alpha z^2},$$

то при $z \rightarrow \infty$ будет $\lim p_2(z) = 1$ и

$$q_2(z) = k - \alpha - \frac{1+\beta}{4z^2} + O(z^{-3}).$$

При этом можно выбрать число $z_1 \geq z_0$ такое, чтобы при $z \geq z_1$ было

$$p_1(z) < 1 + \beta. \quad (66)$$

Теперь обозначим через $-\tilde{\Delta}_1$ оператор, определяемый лапласианом $-\Delta$ в предельно-цилиндрической области $\tilde{\Omega}_1$, ограниченной поверхностями $z = z_1$ и (56) с нулевым краевым условием. Соответствующий оператор M_2 будет действовать в $\mathcal{L}_2(Z_1)$, где Z_1 есть часть цилиндра Z , лежащая выше плоскости $z = z_1$, а операторы $L_{2,n}$ будут действовать в $\mathcal{L}_2(z_1, \infty)$. При этом для $n = 1$ будет

$$q_2(z) = -\frac{1+\beta}{4z^2} + O(z^{-3}). \quad (67)$$

Из (66) и (67) на основании условия осцилляторности (40) п° 30 заключаем о бесконечности множества отрицательных собственных значений оператора $L_{2,n}$ при $n = 1$.

Таким образом, установлено, что оператор M_2 имеет бесконечное множество отрицательных собственных значений. Но тогда, в силу второй части двойного неравенства (59), оператор $-\tilde{\Delta}_1$ в предельно-цилиндрической обла-

сти $\tilde{\Omega}_1$ будет левее точки α иметь бесконечное множество собственных значений. Так как, наконец, $\tilde{\Omega}_1 \subset \Omega_1$, то по лемме 2 данный оператор $-\tilde{\Delta}$ в $\mathcal{L}_2(\Omega)$ будет иметь левее точки α бесконечную последовательность собственных значений. Теорема доказана полностью.

Из теоремы 16 следует, что при условиях (54) или (55) финитные деформации области Ω могут изменить количество собственных значений оператора $-\tilde{\Delta}$, лежащих левее нижней грани его непрерывного спектра, лишь на конечное число.

Если возмущение $\delta(z)$ удовлетворяет условию (55), то, очевидно, число $m(\epsilon)$ собственных значений оператора $-\tilde{\Delta}$, меньших $\alpha - \epsilon$, будет при $\epsilon \downarrow 0$ расти тем быстрее, чем медленнее убывает функция $\delta(z)$ при $z \rightarrow \infty$. Для получения соответствующих оценок будем предполагать функцию $\delta(z)$ положительной и монотонно убывающей. Обозначим при малом $\epsilon > 0$ через ω_ϵ конечную часть области Ω , отсекаемую от нее плоскостью $z = a(\epsilon)$, где число $a(\epsilon)$ таково, что первое собственное значение краевой задачи для двумерного лапласиана $-\Delta$ в сечении $z = a(\epsilon)$ с нулевым условием на его границе равно $\alpha - \epsilon$. Далее, через $k(\epsilon)$ обозначим число собственных значений оператора $-\Delta$ в $\mathcal{L}_2(\omega_\epsilon)$ с нулевым условием на границе ω_ϵ , меньших $\alpha - \epsilon$. Через $k'(\epsilon)$ обозначим число собственных значений, меньших $\alpha - \epsilon$, у краевой задачи, возникающей из предыдущей при замене нулевого краевого условия на границе $z = a(\epsilon)$ условием $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$.

Так как, очевидно, оператор, определяемый операцией $-\Delta$ в $\mathcal{L}_2(\Omega - \omega_\epsilon)$ с условием $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ на сечении $z = a(\epsilon)$ и нулевым условием на остальной части границы $\Omega - \omega_\epsilon$, не имеет точек спектра левее $\alpha - \epsilon$, то в соответствии с леммой 1 имеем

$$k(\epsilon) < m(\epsilon) < k'(\epsilon). \quad (68)$$

Разбивая теперь интервал $0 \leq z \leq a(\epsilon)$ на части точками $z_0 = 0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n = a(\epsilon)$, составим из цилиндров с высотами $z_{i+1} - z_i$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$), вписанных и соответственно описанных около области ω_ϵ , ступенчатые тела λ_ϵ и λ'_ϵ . Далее, введем в рассмотрение две краевые задачи, определяемые операцией $-\Delta$ в областях λ_ϵ и λ'_ϵ .

При этом на цилиндрических участках границы этих областей зададим нулевые условия, а на торцовых перегородках $z = z_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) в первом случае условие $u = 0$, а во втором $-\frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Из вариационных принципов Р. Куранта следуют для чисел $\nu(\epsilon)$ и $\nu'(\epsilon)$ собственных значений введенных краевых задач, меньших $\alpha - \epsilon$, соотношения $\nu(\epsilon) < k(\epsilon)$ и $k'(\epsilon) < \nu'(\epsilon)$, которые в сочетании с (68) дают двойное неравенство

$$\nu(\epsilon) < m(\epsilon) < \nu'(\epsilon). \quad (69)$$

Для каждого из цилиндров, составляющих область $\lambda(\epsilon)$, определение числа собственных значений, меньших $\alpha - \epsilon$, сводится к решению относительно натурального m_i неравенств

$$\frac{\alpha}{[1 + \delta(z_i)]^2} + \frac{m_i^2 \pi^2}{(z_i - z_{i-1})^2} < \alpha - \epsilon \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

К аналогичным неравенствам сводится определение числа собственных значений, меньших $\alpha - \epsilon$, для цилиндров, составляющих ступенчатое тело λ'_ϵ .

Таким путем легко приходим к неравенствам

$$\nu(\epsilon) > \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \sqrt{\alpha - \epsilon - \frac{\alpha}{(1 + \delta(z_i))^2}} + (n - 1)$$

и

$$\nu'(\epsilon) < \frac{1}{\pi} \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \sqrt{\alpha - \epsilon - \frac{\alpha}{(1 + \delta(z_{i-1}))^2}} + 2n,$$

которые вместе с (69) дают для $m(\epsilon)$ оценку

$$-2n + \frac{1}{\pi} \check{S}_n(\epsilon) < m(\epsilon) < \frac{1}{\pi} \hat{S}_n(\epsilon) + 2n, \quad (70)$$

где $\check{S}_n$ и $\hat{S}_n$ — нижняя и верхняя суммы Дарбу для интеграла

$$J(\epsilon) = \int_0^{\alpha(\epsilon)} \sqrt{\alpha - \epsilon - \frac{\alpha}{(1 + \delta(z))^2}} dz.$$

При некоторых ограничительных условиях на возмущение $\delta(z)$ из соотношения (71) можно получить [32] при $\epsilon \downarrow 0$

асимптотическую формулу

$$m(\varepsilon) = \frac{1 + o(1)}{\pi} \int_0^{a(\varepsilon)} \sqrt{\alpha - \varepsilon - \frac{\alpha}{[1 + \delta(z)]^2}} dz. \quad (71)$$

Описание класса возмущений $\delta(z)$, для которых имеет место формула (71), приведенное в [32], несколько громоздко и поэтому опускается. Но в отличие от метода статьи [84], где рассматривалась родственная одномерная задача, намеченный выше вывод формулы (71) позволяет обобщить одномерную асимптотическую формулу Н. Розенфельда [84] на двучленные одномерные операции главы II любого порядка. Обобщение асимптотической формулы Н. Розенфельда на многомерную операцию (1) во всем пространстве $\mathcal{E}$ в предположении пятикратной дифференцируемости потенциала и при других ограничениях дано в [18].

Уклоняясь от чисто аналитических рассуждений, ограничимся доказательством следующего предложения, которое вытекает из [32].

Теорема 17. *Если для возмущения $\delta(z)$ цилиндрической области (51) при некотором положительном $\kappa < 2$ выполнено условие*

$$0 < \liminf_{z \rightarrow \infty} z^\kappa \delta(z) \leq \limsup_{z \rightarrow \infty} z^\kappa \delta(z) < \infty,$$

то существуют такие постоянные $A > 0$ и $B > 0$, что при любом $\varepsilon > 0$ будет

$$A \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{2-\kappa}{2\kappa}} < m(\varepsilon) < B \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{2-\kappa}{2\kappa}}. \quad (72)$$

Доказательство. в силу леммы 2, достаточно привести для возмущения $\delta(z) = C(1+z)^{-\kappa}$.

Взяв некоторое положительное число $\beta < 1$ и натуральное n , определим ε равенством

$$\alpha - \varepsilon = \frac{\alpha}{(1 + C\beta^n)^2}.$$

Число β на все время доказательства оставляем фиксированным. Очевидно, при $\varepsilon \downarrow 0$ будет

$$n = O(\ln \varepsilon). \quad (73)$$

При построении сумм $\check{S}_n(\epsilon) = \check{S}(\epsilon)$ и $\hat{S}_n(\epsilon) = \hat{S}(\epsilon)$ положим

$$\delta(z_i) = C\beta^i \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

так что будет

$$z_i = \beta^{-\frac{i}{x}} - 1$$

и

$$z_i - z_{i-1} = \left(1 - \beta^{\frac{1}{x}}\right) \beta^{-\frac{i}{x}}.$$

Теперь для нижней суммы Дарбу имеем

$$\begin{aligned} \check{S}(\epsilon) &= \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \sqrt{\alpha - \epsilon - \frac{\alpha}{(1 + \delta(z_i))^2}} = \\ &= \sqrt{\alpha} \left(1 - \beta^{\frac{1}{x}}\right) \sum_{i=1}^n \beta^{-\frac{i}{x}} \sqrt{\frac{1}{(1 + C\beta^n)^2} - \frac{1}{(1 + C\beta^i)^2}} > \\ &> \sqrt{\alpha} \left(1 - \beta^{\frac{1}{x}}\right) \sum_{i=1}^n \beta^{-\frac{i}{x}} \sqrt{\frac{1}{(1 + C\beta^n)^2} - \frac{1}{(1 + C\beta^{i-1})^2}}, \end{aligned}$$

откуда при достаточно малых $\epsilon > 0$ получаем оценку

$$\check{S}(\epsilon) > \gamma_1 \left(\frac{1}{\epsilon}\right)^{\frac{2-x}{2x}}, \quad (74)$$

где константа γ_1 от ϵ не зависит.

Для верхней суммы Дарбу будет

$$\begin{aligned} \hat{S}(\epsilon) &= \sum_{i=1}^n (z_i - z_{i-1}) \sqrt{\alpha - \epsilon - \frac{\alpha}{(1 + \delta(z_{i-1}))^2}} = \\ &= \left(1 - \beta^{\frac{1}{x}}\right) \sum_{i=1}^n \beta^{-\frac{i}{x}} \sqrt{\frac{\alpha}{(1 + C\beta^n)^2} - \frac{\alpha}{(1 + C\beta^{i-1})^2}} = \\ &= \sqrt{\alpha} \left(1 - \beta^{\frac{1}{x}}\right) \sum_{i=1}^n \beta^{-\frac{i}{x}} \frac{\sqrt{(1 + C\beta^{i-1})^2 - (1 + C\beta^n)^2}}{(1 + C\beta^n)(1 + C\beta^i)} < \\ &< \sqrt{\alpha} \left(1 - \beta^{\frac{1}{x}}\right) \sum_{i=1}^n \beta^{-\frac{i}{x}} \frac{\sqrt{2C\beta^{i-1} + C^2\beta^{2(i-1)}}}{(1 + C\beta^n)^2}, \end{aligned}$$

откуда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ получим оценку

$$\hat{S}(\varepsilon) < \gamma_2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \right)^{\frac{2-\alpha}{2\alpha}} \quad (75)$$

с константой γ_2 , не зависящей от ε .

Сопоставляя соотношения (70), (73), (74) и (75), получаем требуемое неравенство (72).

Если в (52) заменить множитель $1 + \delta(z)$ на $\delta(z)$, то область Ω будет неограниченно сужаться при $z \rightarrow \infty$. Спектр оператора $-\tilde{\Delta}$ в этой области будет, согласно теореме 4, дискретным. Если объем V такой предельно-цилиндрической области с нулевым радиусом в бесконечности конечен, то в предположении монотонного убывания возмущения $\delta(z)$ для числа $m(\lambda)$ собственных значений, меньших λ при $\lambda \rightarrow \infty$, сохраняет силу обычная асимптотическая формула

$$m(\lambda) = \frac{1 + o(1)}{6\pi^2} \lambda^{3/2} V,$$

а при $V = \infty$ будет

$$m(\lambda) = \frac{1 + o(1)}{6\pi^2} \lambda^{3/2} \int_{\delta \geq \frac{\alpha}{V\lambda}} \delta^2(z) dz,$$

где α — первое собственное значение краевой задачи, индуцируемой оператором $-\tilde{\Delta}$ в части плоскости $z = z_0$, ограниченной кривой $r = r(\varphi)$ [32].

ГЛАВА V

ХАРАКТЕР СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА И ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ СООТВЕТСТВУЮЩЕГО ОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ

51. Постановка задачи. Пусть L есть минимальный оператор, определяемый во всем пространстве $\mathcal{E}_m$ операцией

$$-\Delta u + q(P)u \quad (1)$$

с ограниченным снизу потенциалом $q(P)$, так что $L = L^*$. Предметом настоящей главы является исследование связи между поведением в бесконечности решений $\varphi(P; \lambda)$ уравнения

$$-\Delta u + q(P)u = \lambda u \quad (2)$$

и расположением точки λ относительно спектра оператора L .

Условие полуограниченности снизу потенциала считается выполненным на протяжении всей главы. При этом через q_0 обозначается величина, удовлетворяющая неравенству

$$-\infty < q_0 \leq \inf_{P \in \mathcal{E}_m} q(P).$$

Для предварительной ориентировки в вопросе рассмотрим простейший самосопряженный одномерный дифференциальный оператор L_θ , определяемый на полуоси $x \geq 0$ операцией $-\frac{d^2}{dx^2}$ с краевым условием $y'(0) = -\theta y(0)$. Непрерывная часть спектра $C(L_\theta)$ этого оператора совпадает с полуосью $\lambda \geq 0$, а дискретная часть $D(L_\theta)$ сводится к одной точке $\lambda = -\theta^2$. Единственное с точностью до мультипликативной постоянной решение

$$\varphi(x; \lambda) = (i\sqrt{\lambda} - \theta)e^{i\sqrt{\lambda}x} + (i\sqrt{\lambda} + \theta)e^{-i\sqrt{\lambda}x}$$

уравнения

$$y'' + \lambda y = 0, \quad (3)$$

удовлетворяющее заданному краевому условию, обладает при $x \rightarrow \infty$ следующими свойствами:

1) Если исключить принадлежность точки λ изолированной части множества $D(L_0)$, то функция $\varphi(x; \lambda)$ растет тем медленнее, чем ближе точка λ к множеству $C(L_0)$.

2) Если λ есть изолированная точка множества $D(L_0)$, то функция $\varphi(x; \lambda)$ убывает экспоненциально и скорость этого убывания тем выше, чем дальше точка λ от множества $C(L_0)$.

3) Если $\lambda \in C(L_0)$, то функция $\varphi(x; \lambda)$ остается ограниченной при $x \rightarrow \infty$.

В этой главе будет показано, что отмеченные свойства 1)–3) решения уравнения (3) в какой-то мере отражают ситуацию, имеющую место в общем случае уравнения (2), если только предполагать потенциал ограниченным снизу.

Дальнейшие результаты п° 52–55 принадлежат Э. Э. Шнолю [108].

52. Некоторые априорные оценки для решений однородного эллиптического уравнения. Установим теперь две важные для всего дальнейшего леммы [108 (4)] о решениях уравнения

$$-\Delta u + q(P)u = 0 \quad (4)$$

с потенциалом $q(P) \geq q_0 > -\infty$. В неточной формулировке смысл этих лемм состоит в том, что при фиксированном интеграле

$$\int_{|PQ|=R} |u(Q)|^2 d\omega_Q$$

ни величина градиента решения в шаре $|PQ| \leq R$, ни значение $u(P)$ решения в центре этого шара не могут быть слишком большими.

Лемма 1. При данных R и $R_1 (R_1 < R)$ и произвольном выборе точки $P \in \mathbb{E}_m$ для любого решения уравнения (4) имеет место неравенство

$$\int_{|PQ| \leq R_1} |\nabla u(Q)|^2 d\omega_Q < C \int_{|PQ| \leq R} |u(Q)|^2 d\omega_Q, \quad (5)$$

где константа C зависит лишь от q_0 .

Лемма 2. При данном $R > 0$ и произвольном выборе точки $P \in \mathbb{E}_m$ для любого решения уравнения (4) имеет место неравенство

$$|u(P)|^2 < K \int_{|PQ| \leq R} |u(Q)|^2 d\omega_Q, \quad (6)$$

где константа K зависит лишь от q_0 .

При доказательстве обеих лемм и далее будем для определенности считать $m = 2$.

Пусть $\theta(Q)$ есть гладкая в $\mathbb{E}_2$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\theta(Q) = \begin{cases} 1 & \text{при } |PQ| \leq R_1, \\ 0 & \text{при } |PQ| \geq R, \end{cases}$$

$$0 \leq \theta(P) \leq 1 \quad (R_1 \leq |PQ| \leq R).$$

Применяя первую формулу Грина

$$\int_{|PQ| \leq R} l[u] v d\omega_Q =$$

$$= \int_{|PQ| \leq R} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} + quv \right\} d\omega_Q - \int_{|PQ|=R} \frac{\partial u}{\partial n} v d\sigma_Q$$

к решению $u(Q)$ и к функции $v(Q) = \theta(Q)u(Q)$, получаем

$$0 = \int_{|PQ| \leq R} \theta \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} d\omega_Q +$$

$$+ \int_{|PQ| \leq R} u \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right\} d\omega_Q + \int_{|PQ| \leq R} q\theta u^2 d\omega_Q.$$

но

$$\int_{|PQ| \leq R} \left\{ \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial u^2}{\partial y} \right\} d\omega_Q = - \int_{|PQ| \leq R} u^2 \Delta \theta d\omega_Q,$$

так что

$$\int_{|PQ| \leq R} \theta \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} d\omega_Q =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{|PQ| \leq R} u^2 \Delta \theta d\omega_Q - \int_{|PQ| \leq R} q\theta u^2 d\omega_Q.$$

откуда

$$\begin{aligned} \int_{|PQ| \leq R_1} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right\} d\omega_Q < \\ < \frac{1}{2} \int_{|PQ| \leq R} u^2 \Delta \theta d\omega_Q - q_0 \int_{|PQ| \leq R} \theta u^2 d\omega_Q. \end{aligned} \quad (7)$$

и, следовательно,

$$\int_{|PQ| \leq R_1} |\nabla u(Q)|^2 d\omega_Q < C \int_{|PQ| \leq R} |u(Q)|^2 d\omega_Q. \quad (8)$$

Таким образом, лемма 1 доказана. Переходя к доказательству леммы 2, выберем сначала радиус R круга $|P_0Q| \leq R$ настолько малым, чтобы первое собственное значение внутренней краевой задачи для уравнения Лапласа с условием $u(Q) = 0$ при $|P_0Q| = R$ было больше $|q_0|$. При указанном выборе числа R все собственные значения такой же краевой задачи для уравнения (4) будут положительны. Из вариационного принципа Р. Куранта следует, что все собственные значения внутренней краевой задачи для уравнения (4) с условием $u(Q)|_{Q \in \Gamma} = 0$ также будут положительны, если только Γ есть граница области, лежащей в круге $|P_0Q| < R$. Отсюда, в частности, следует, что любое решение уравнения (4), обращающееся в нуль на границе некоторой области, лежащей в круге радиуса R , равно тождественно нулю в этой области.

Пользуясь этим, покажем, что функции Грина $G(P, Q)$ и $G_0(P, Q)$ краевой задачи с условием $u(Q) = 0$ при $|P_0Q| = R$ для уравнений (4) и

$$-\Delta u + q_0 u = 0$$

соответственно связаны при $|P_0P| < R$, $|P_0Q| < R$ неравенством

$$G(P, Q) \leq G_0(P, Q). \quad (9)$$

В силу соотношения

$$\begin{aligned} K_0(P, Q) = K(P, Q) + \\ + \int_{|P_0M| \leq R} K(P, M) [q(M) - q_0] K_0(M, Q) d\omega_M \end{aligned}$$

достаточно установить неотрицательность функции под знаком интеграла в правой части последнего равенства, а для этого достаточно доказать неотрицательность функций Грина $G(P, Q)$ при $|P_0P| < R$, $|PQ| < R$.

Предполагая противное, получим $G(P_1, Q_1) < 0$, а так как для точек Q , близких к P_1 , очевидно, $G(P_1, Q) > 0$, то существует внутри круга $|P_0Q| \leq R$ область, на границе которой $G(P_1, Q) = 0$; но тогда в этой области $G(P_1, Q) \equiv 0$, что абсурдно.

Таким образом, неравенство (9) установлено, и можно приступить непосредственно к выводу неравенства (6).

Выберем числа R_1, R_2 ($0 < R_1 < R_2 < R$) и построим гладкую в $\mathbb{E}_2$ функцию $\theta(Q)$, удовлетворяющую условиям

$$\theta(Q) := \begin{cases} 1 & \text{при } |P_0Q| \leq R_1, \\ 0 & \text{при } |P_0Q| \geq R_2, \end{cases}$$

$$0 \leq \theta(Q) \leq 1 \quad (R_1 < |P_0Q| < R_2).$$

Для любого решения $u(Q)$ уравнения (5) имеем

$$\|l[\theta u]\| = \left\| \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + u \Delta \theta \right\| \leq$$

$$\leq C_1 \left\{ \int_{|P_0Q| \leq R_2} |\nabla u|^2 d\omega_Q \right\}^{\frac{1}{2}} + C_2 \left\{ \int_{|P_0Q| \leq R_2} |u|^2 d\omega_Q \right\}^{\frac{1}{2}}$$

и, согласно лемме 1,

$$\|l[\theta u]\|^2 \leq C \int_{|P_0Q| \leq R} |u|^2 d\omega_Q. \quad (10)$$

Пользуясь неравенствами (9), (10) и неравенством Коши — Буняковского, получаем для величины

$$u(P_0) = \theta(P_0) u(P_0) = \int_{|P_0Q| \leq R} G(P_0, Q) l[\theta(Q) u(Q)] d\omega_Q \quad (11)$$

оценку

$$|u(P_0)|^2 \leq \int_{|P_0Q| \leq R} G^2(P_0, Q) Q\omega_Q \cdot \int_{|P_0Q| \leq R} |l[\theta u]|^2 d\omega_Q \leq$$

$$\leq \int_{|P_0Q| \leq R} G_0^2(P_0, Q) d\omega_Q \cdot \|l[\theta u]\|^2 \leq K \int_{|P_0Q| \leq R} |u|^2 d\omega_Q.$$

Эта оценка установлена для достаточно малых R , но так как правая часть полученного неравенства возрастает при возрастании R , то лемма 2 доказана полностью.

Приведенное доказательство, хотя и теряет силу при $m > 3$ вследствие расходимости интеграла

$$\int_{|P_0 Q| \leq R} G^2(P_0, Q) d\omega_Q,$$

но может быть легко исправлено, так как фактическое интегрирование в (11) проводится по кольцевой области $R_1 \leq |P_0 Q| \leq R_2$.

Доказанные леммы близки к одной геометрической теореме С. Н. Бернштейна, связанной с эллиптическими дифференциальными уравнениями ([12], см. также [2]).

53. Поведение решений в точках дискретной части спектра. Если $\lambda \in D(L)$ и $\varphi(P; \lambda)$ — соответствующая собственная функция оператора L , то $\varphi(P; \lambda) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E}_m)$. С другой стороны, в силу леммы 2,

$$|\varphi(P; \lambda)| \leq K \int_{|PQ| \leq R} |\varphi(Q; \lambda)|^2 d\omega_Q.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $|OP| \rightarrow \infty$, получаем

$$\lim_{|OP| \rightarrow \infty} |\varphi(P; \lambda)| = 0.$$

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 1 [108 (4)]. *Каждая собственная функция $\varphi(P; \lambda)$ оператора L стремится к нулю при $|OP| \rightarrow \infty$.*

Если λ — изолированная точка множества $D(L)$, то, как показывает следующая теорема 2, можно оценить снизу скорость стремления функции $\varphi(P; \lambda)$ к нулю.

Теорема 2 [108 (4)]. *Если расстояние собственного значения λ оператора L от множества $C(L)$ равно d , то при всех $P \in \mathcal{E}_m$ будет*

$$|\varphi(P; \lambda)| \leq C e^{-\mu r} \quad (r = |OP|), \quad (12)$$

где $\mu = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{a^2} \right)$, η — любое число, меньшее d , и постоянная a зависит лишь от q_0 .

Доказательство. Пусть расстояние собственного значения λ оператора L от $C(L)$ равно d и пусть $\varphi(P; \lambda)$ — собственная функция оператора L . Так как $\varphi(P; \lambda) \in \mathcal{L}_2(\mathcal{E}_m)$,

то функция

$$J(r) = \int_{|OP| \geq r} |\varphi(P, \lambda)|^2 d\omega_P$$

стремится к нулю, если $r \rightarrow \infty$, и при $\mu = 0$ существует константа $C(\mu)$ такая, что при всех $r \geq 0$

$$J(r) \leq C(\mu) e^{-\mu r}. \quad (13)$$

Обозначим через μ_0 точную верхнюю грань множества значений μ , для которых существует константа $C(\mu)$ такая, что при всех $r \geq 0$ выполнено неравенство (11). Очевидно, $\mu_0 \geq 0$, и если только $\mu_0 \neq \infty$, то при каждом $\delta > 0$ существует последовательность $r_n \rightarrow \infty$, для которой при любом значении C будет

$$J(r_n) > C e^{-(\mu_0 + \delta) r_n}. \quad (14)$$

С другой стороны, при каждом $\delta > 0$ и некотором значении C , при всех $r \geq 0$ имеет место неравенство

$$J(r) < C e^{-(\mu_0 - \delta) r}. \quad (15)$$

Зафиксировав число $\delta > 0$, построим последовательность $\rho_n \rightarrow \infty$, для которой

$$J(\rho_n) \leq e^{\mu_0 + \delta} J(\rho_n + 1). \quad (16)$$

Такая последовательность существует, ибо в противном случае при любом $r > r_1$ было бы $J(r) < e^{-(\mu_0 + \delta)} J(r - 1)$, откуда для некоторого C следует неравенство $J(r) < C e^{-(\mu_0 + \delta) r}$, несовместимое с (14).

Далее, построим систему функций $\theta_n(P)$ по формуле

$$\theta_n(P) = \theta_n(r) = \theta(r - \rho_n),$$

где $\theta(r)$ — гладкая при $r > 0$ функция, удовлетворяющая условиям

$$\theta(r) = \begin{cases} 0 & \text{при } r \leq \frac{1}{3}, \\ 1 & \text{при } r \geq \frac{2}{3}, \end{cases} \quad (17)$$

$$0 \leq \theta(r) \leq 1 \quad \left(\frac{1}{3} < r < \frac{2}{3} \right),$$

и положим

$$\varphi_n(P) = \theta_n(P) \varphi(P; \lambda).$$

Для нормы функции $\varphi_n(P) \in \mathfrak{D}_L$ получаем оценку

$$\|\varphi_n\|^2 \geq J(\rho_n + 1) \geq e^{-(\mu_0 + \delta)} J(\rho_n), \quad (18)$$

а для нормы функции $l[\varphi_n] - \lambda\varphi_n$, как в п° 52, имеем

$$\begin{aligned} \|l[\varphi_n] - \lambda\varphi_n\| \leq C_1 \left\{ \int_{\rho_n + \frac{1}{3} \leq |OP| \leq \rho_n + \frac{2}{3}} |\nabla \varphi|^2 d\omega_P \right\}^{1/2} + \\ + C_2 \left\{ \int_{\rho_n \leq |OP| \leq \rho_n + 1} |\varphi|^2 d\omega_P \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Пользуясь леммой 1 и неравенствами (16), (18), получаем отсюда

$$\begin{aligned} \|l[\varphi_n] - \lambda\varphi_n\|^2 &< C \int_{\rho_n \leq |OP| \leq \rho_n + 1} |\varphi(P; \lambda)|^2 d\omega_P = \\ &= C \{J(\rho_n) - J(\rho_n + 1)\} \leq C \{J(\rho_n) - e^{-(\mu_0 + \delta)} J(\rho_n)\} = \\ &= C J(\rho_n) \{1 - e^{-(\mu_0 + \delta)}\} \leq C e^{(\mu_0 + \delta)} \{1 - e^{-(\mu_0 + \delta)}\} \|\varphi_n\|^2, \end{aligned}$$

так что

$$\|L\varphi_n - \lambda\varphi_n\| < a(e^{\mu_0 + \delta} - 1)^{1/2} \|\varphi_n\|.$$

Из этого неравенства на основании теоремы 10 п° 3 заключаем, что $d < a \sqrt{e^{\mu_0 + \delta} - 1}$, а так как величина $\delta > 0$ произвольна, то $d \leq a \sqrt{e^{\mu_0} - 1}$, так что при $\eta < d$ будет

$$\mu_0 \geq \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{a^2} \right).$$

Таким образом, в силу (15), при любом $\mu < \mu_0$ и, в частности, при $\mu = \ln \left(1 + \frac{\eta^2}{a^2} \right)$, где η — любое число, меньшее d , существует константа $C = C(\eta)$ такая, что при всех $r \geq 0$

$$\int_{|OP| \geq r} |\varphi(P; \lambda)|^2 d\omega_P \leq C e^{-\mu r}. \quad (19)$$

Из этой интегральной оценки легко получить оценку (12) для $\varphi(P; \lambda)$, если воспользоваться леммой 2.

Действительно, если бы при некоторых $\eta_1 < d$ и $C_1 > 0$ нашлась последовательность $r_n \rightarrow \infty$, для которой

$$|\varphi(P_n; \lambda)| > C_1 e^{-\mu_1 r_n},$$

где $|OP_n| = r_n$ и $\mu_1 = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{\eta_1^2}{a^2} \right)$, то, в силу леммы 2, было бы

$$\int_{|P_n P| \leq 1} |\varphi(P; \lambda)|^2 d\omega_P > C_2 e^{-2\mu_1 r_n}, \quad (20)$$

где $C_2 > 0$.

Полученное неравенство (20) при $\eta < \eta_1 < d$ противоречит установленному соотношению (18).

Таким образом, в случае $\mu_0 \neq \infty$ теорема доказана. Если же $\mu_0 = \infty$, то при любом μ и соответствующем значении $C = C(\mu)$ имеет место оценка (19), но тогда из леммы 2 следует такая же, с точностью до мультипликативной постоянной, оценка для $\varphi(P; \lambda)$, так что теорема доказана полностью.

Если спектр оператора L дискретен, что имеет, например, место при условии

$$\lim_{|OP| \rightarrow \infty} q(P) = \infty,$$

то, в силу доказанной теоремы, каждая собственная функция оператора L будет убывать быстрее $e^{-\mu r}$ при любом $\mu > 0$. Так, например, собственные функции одномерного гармонического осциллятора

$$l[y] = -\frac{d^2 y}{dx^2} + x^2 y \quad (-\infty < x < \infty)$$

убывают, как произведение многочлена на $e^{-x^2/2}$ [61 (1)].

Теорема 2 этого пункта усиливает соответствующие результаты Винтнера [23 (4)] и Патнама [79 (3)] об одномерных дифференциальных операторах.

54. Оценка расстояния точки от спектра по поведению решения в этой точке. Следующей теоремой устанавливается, что, если для данного λ решение $\varphi(P; \lambda)$ при $|OP| \rightarrow \infty$ растет не очень быстро, то расстояние точки λ от спектра оператора L не очень велико.

Теорема 3 [108 (4)]. Если при данном λ для некоторого решения $\varphi(P; \lambda)$ при всех $P \in \mathcal{E}_m$ выполнено

неравенство

$$|\varphi(P; \lambda)| < Ce^{\mu r}, \quad (21)$$

то расстояние точки λ от $S(L)$ не превосходит $d = a \sqrt{e^{2\mu} - 1}$, где $a = a(q_0)$.

Доказательство. Функция $J(r)$, определяемая равенством

$$J(r) = \int_{|OP| \leq r} |\varphi(P; \lambda)|^2 d\omega_P,$$

в силу (21), при любом $\delta > 0$ удовлетворяет условию

$$J(r) < e^{(2\mu + \delta)r} \quad (22)$$

для любого $r > r_0$, где $r_0 = r_0(\delta)$.

Зафиксировав число $\delta_1 > 0$, построим последовательность $\rho_n \rightarrow \infty$, для которой

$$J(\rho_n + 1) < e^{2\mu + \delta_1} J(\rho_n). \quad (23)$$

Такая последовательность существует, ибо в противном случае было бы при любом $r > r_1$

$$J(r) > e^{2\mu + \delta_1} J(r - 1),$$

откуда при некотором $C > 0$ следует неравенство

$$J(r) > Ce^{(2\mu + \delta_1)r},$$

несовместимое с (21) при $\delta < \delta_1$.

Теперь построим систему функций $\theta_n(P)$ по формуле

$$\theta_n(P) = \theta_n(r) = \theta(r - \rho_n),$$

где $\theta(r)$ — гладкая при $r > 0$ функция, удовлетворяющая условиям (17), и положим

$$\varphi_n(P) = \{1 - \theta_n(P)\} \varphi(P; \lambda). \quad (24)$$

Для нормы функции $\varphi_n(P) \in \mathfrak{D}_L$ имеем

$$\|\varphi_n\|^2 > J(\rho_n), \quad (25)$$

а для нормы функции $l[\varphi_n] - \lambda\varphi_n$, как и в предыдущем пункте, получим

$$\|l[\varphi_n] - \lambda\varphi_n\| \leq C_1 \left\{ \int_{\rho_n + \frac{1}{3} \leq |OP| < \rho_n + \frac{2}{3}} |\nabla \varphi|^2 d\omega_P \right\}^{1/2} + \\ + C_2 \left\{ \int_{\rho_n + \frac{1}{3} \leq |OP| \leq \rho_n + \frac{2}{3}} |\varphi|^2 d\omega_P \right\}^{1/2}. \quad (26)$$

Пользуясь леммой 1 и неравенствами (23), (25), получаем, далее,

$$\|l[\varphi_n] - \lambda\varphi_n\|^2 < C \int_{\rho_n < |OP| \leq \rho_n + 1} |\varphi(P; \lambda)|^2 d\omega_P = \\ = C \{J(\rho_n + 1) - J(\rho_n)\} < C (e^{2\mu + \delta_1} - 1) J(\rho_n) < \\ < C (e^{2\mu + \delta_1} - 1) \|\varphi_n\|^2, \quad (27)$$

так что

$$\|L\varphi_n - \lambda\varphi_n\| < a \sqrt{e^{2\mu + \delta_1} - 1} \|\varphi_n\|. \quad (28)$$

Из полученного неравенства в силу спектрального разложения следует, что расстояние точки λ от спектра $S(L)$ не превосходит величины $a \sqrt{e^{2\mu + \delta_1} - 1}$, а так как число $\delta_1 > 0$ произвольно, то это расстояние не превосходит $a \sqrt{e^{2\mu} - 1}$, что и требовалось установить.

Из доказанной теоремы непосредственно следует

Теорема 4 [108 (4)]. Если некоторое решение $\varphi(P; \lambda)$ при любом $\varepsilon > 0$ удовлетворяет для всех $P \in \mathcal{E}_m$ неравенству

$$|\varphi(P; \lambda)| < C(\varepsilon) e^{\varepsilon r},$$

то $\lambda \in S(L)$.

В частности, при $\varepsilon = 0$ отсюда вытекает

Теорема 5 [108 (1)]. Если при данном λ существует ограниченное решение $\varphi(P; \lambda)$, то $\lambda \in S(L)$.

Вопрос об обращении этой теоремы будет рассмотрен в п° п° 55 и 58.

Результат, устанавливаемый теоремой 3, далек от точного неравенства. Это, например, обнаруживается при попытке применить теорему 3 к одномерному оператору Шредингера на полуоси $x \geq 0$ с ограниченным потенциалом $|q(x)| < M$. Действительно, в этом случае для любого решения уравнения (2) будет, очевидно (см., например, [67 (1)])

$$|\varphi(x; \lambda)| < A \exp M\lambda^{-1/2}x.$$

С другой стороны, при переходе от (26) к (27) используется оценка (8), в которой константа C линейно зависит от λ , так как в предыдущем неравенстве (7) при замене уравнения (4) уравнением (2) надо заменить q_0 на $q_0 - \lambda$. Таким образом, в окончательном неравенстве (28) в случае ограниченного потенциала при $\lambda \rightarrow \infty$ коэффициент при $\|\varphi_n\|$ имеет порядок $\lambda^{1/4}$. Это означает, что порядок длины лакун в $C(L)$ есть $O(\lambda^{1/4})$, в то время как в действительности (см. п° 31) длина каждой такой лакуны не может превысить $2M$.

Для уточнения неравенства (28) можно сохранить схему доказательства теоремы 3, изменив лишь сглаживающий множитель в (24) так, чтобы длина интервала сглаживания вместо $l = \frac{1}{3}$

равнялась некоторой величине $l = \frac{s}{3}$, где $s = s(\mu)$. С этой целью заменим в (24) $1 - \theta(r - \rho_n)$ на $1 - \theta\left(\frac{r - \rho_n}{l}\right)$, где последовательность $\rho_n \rightarrow \infty$ выбрана так, чтобы вместо (23) имело место неравенство

$$J(\rho_n + l) < e^{2\mu l + \delta_1} J(\rho_n).$$

При этом в правой части (26) область интегрирования будет определяться двойным неравенством $\rho_n + \frac{s}{3} \leq |OP| \leq \rho_n + \frac{2s}{3}$, а в правой части (27) — двойным неравенством $\rho_n \leq |OP| \leq \rho_n + s$.

Теперь в (26), очевидно, будет $C_1 = B_1 s^{-1}$, $C_2 = B_2 s^{-2}$, а для перехода от (26) к (27) придется воспользоваться неравенством (8),

где $R_1 - R = \frac{s}{3}$. Из соотношения (7) легко усматривается, что при этом в (8) будет $C = bs^{-2} + |q_0| + \lambda$. Таким образом, неравенство (27) принимает вид

$$\|l[\varphi_n] - \lambda\varphi_n\|^2 < \{B_1^2 s^{-2}(bs^{-2} + |q_0| + \lambda) + B_2^2 s^{-4}\} (e^{2\mu s + \delta_1} - 1) \|\varphi_n\|^2,$$

откуда, полагая $s = \mu^{-1}$, получаем

$$\|L\varphi_n - \lambda\varphi_n\| < \gamma \|\varphi_n\|, \quad (29)$$

где

$$\gamma = 3 \{B_1^2 \mu^2 (b\mu^2 + |q_0| + \lambda) + B_2^2 \mu^4\}^{1/2}. \quad (30)$$

Из соотношений (29) и (30) следует

Теорема 3^{bis}. Если при данном λ для некоторого решения $\varphi(P; \lambda)$ при всех $P \in \mathcal{E}_m$ выполнено неравенство

$$|\varphi(P; \lambda)| < Ce^{\mu r},$$

то расстояние точки λ от $S(L)$ не превосходит величины γ , определяемой формулой (30). В частности, при малых и больших μ порядок этого расстояния есть μ и μ^2 соответственно.

Очевидно, теорема 3^{bis} существенно уточняет теорему 3, которая при малых и больших μ дает в качестве расстояния от

спектра величины порядка $\sqrt{\mu}$ и $\exp \mu$ соответственно. Одно применение теоремы 3^{bls} будет указано в конце п° 57.

55. Поведение решений в точках непрерывной части спектра. Ранее, в п° 53, было установлено, что в изолированных точках спектра собственные функции экспоненциально убывают. В настоящем пункте для одномерного случая будет показано, что в точках λ непрерывной части спектра решения $\varphi(x; \lambda)$ уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \quad (0 \leq x < \infty) \quad (31)$$

не могут, вообще говоря, быстро расти.

Следующей леммой устанавливается, что график решения $y(x)$ уравнения (31) не может иметь высоких «пиков», то есть при достаточно малом и не зависящем от x_0 радиусе δ окрестности точки x_0 величина $|y(x)|$ не может с обеих сторон от x_0 принимать слишком малые по сравнению с $|y(x_0)|$ значения. Доказательство этой леммы по своему характеру близко к доказательству известных дифференциальных неравенств С. А. Чаплыгина.

Лемма 3 [108 (2)]. При данном значении λ существует не зависящее от x_0 число $\delta > 0$ такое, что для решения $y(x) = \varphi(x; \lambda)$ уравнения (31) по крайней мере в одном из двух промежутков, $x_0 - \delta < x < x_0$ либо $x_0 < x < x_0 + \delta$, будет

$$|\varphi(x; \lambda)| \geq \frac{1}{2} |\varphi(x_0; \lambda)|.$$

Доказательство. Полагая для определенности $y(x_0) > 0$, $y'(x_0) > 0$, обозначим через $z(x)$ решение уравнения

$$-z'' + q_0 z = \lambda z, \quad (32)$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$z(x_0) = y(x_0), \quad z'(x_0) = y'(x_0).$$

Из (31) и (32) следует неравенство

$$y''(x_0) - z''(x_0) = [q(x_0) - q_0] z(x_0) > 0,$$

так что в некоторой правой полуокрестности точки x_0 будет

$$y(x) > z(x).$$

В действительности последнее неравенство имеет место при всех $x > x_0$, ибо в противном случае, обозначив через

x_1 ($x_1 > x_0$) ближайшую к x_0 точку, в которой $y(x_1) = z(x_1)$, получили бы при некотором $x = x^*$ ($x_0 < x^* < x_1$) равенство $y'(x^*) = z'(x^*) = 0$, противоречащее очевидному соотношению

$$y'(x^*) - z'(x^*) = \int_{x_0}^{x^*} \{[q(x) - \lambda]y + [q_0 - \lambda]z\} dx > 0.$$

Не ограничивая общности, можно считать $\lambda - q_0 > 0$, так что график решения $z(x)$ есть синусоида с периодом $2\pi(\lambda - q_0)^{-1/2}$, и поэтому на интервале $(x_0, x_0 + \delta)$ при

$$\delta = \frac{\pi}{3\sqrt{\lambda - q_0}} \quad (33)$$

будет

$$y(x) > \frac{1}{2} y(x_0),$$

что и требовалось установить.

В следующей лемме через $\rho(\lambda)$ обозначена спектральная функция оператора L .

Лемма 4 [108 (2)]. Если $f(x)$ есть произвольная нормированная функция из $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ с финитным обобщенным преобразованием Фурье $F(\lambda)$, так что

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = 1 \quad (34)$$

и

$$f(x) = \int_{-a}^a F(\lambda) \varphi(x; \lambda) d\rho(\lambda), \quad (35)$$

то при фиксированном конечном значении a существует не зависящая от $f(x)$ константа C такая, что

$$|f(x)| < C \quad (0 \leq x < \infty).$$

Доказательство. Очевидно, достаточно найти не зависящее от функции $f(x)$ и значения x_0 число $\delta > 0$ такое, чтобы при $|f(x_0)| > 1$ по крайней мере в одном из двух промежутков, $x_0 - \delta < x < x_0$ либо $x_0 < x < x_0 + \delta$, имело место неравенство

$$|f(x)| \geq \frac{1}{4} |f(x_0)|.$$

Пусть x_0 — любое положительное число. Считая для определенности $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$, положим

$$g(x) = -f''(x) + q(x)f(x) \quad (36)$$

и обозначим через $y(x)$ решение дифференциального уравнения

$$g(x) = -y''(x) + q_0 y(x)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = f(x_0), \quad y'(x_0) = f'(x_0).$$

Так как

$$f''(x_0) - y''(x_0) = [q(x_0) - q_0]f(x_0) > 0,$$

то в некоторой правой полуокрестности точки x_0 будет

$$f(x) > y(x). \quad (37)$$

В действительности последнее неравенство имеет место при всех $x > x_0$, ибо в противном случае, обозначив через x_1 ($x_1 > x_0$) ближайшую к x_0 точку, в которой $f(x_1) = y(x_1)$, получили бы при некотором $x = x^*$ ($x_0 < x^* < x_1$) равенство $f'(x^*) = y'(x^*) = 0$, противоречащее очевидному соотношению

$$f'(x^*) - y'(x^*) = \int_{x_0}^{x^*} \{q(x)f(x) - q_0 y(x)\} dx > 0.$$

Обозначая, далее, через $z(x)$ решение однородного уравнения

$$-z'' + q_0 z = 0 \quad (q_0 < 0)$$

с начальными условиями

$$z(x_0) = y(x_0), \quad z'(x_0) = y'(x_0),$$

получаем

$$y(x) = z(x) + u(x), \quad (38)$$

где

$$u(x) = \frac{1}{V|q_0|} \int_{x_0}^x \sin V|q_0|(x-s) g(s) ds.$$

Так как $z(x)$ есть синусоида с периодом $\frac{2\pi}{V|q_0|}$ и $z(x_0) > 0$,

$z'(x_0) > 0$, то на интервале $(x_0, x_0 + \delta_1)$ при $\delta_1 = \frac{\pi}{3V|q_0|}$

будет

$$z(x) > \frac{1}{2} z(x_0). \quad (39)$$

Второе слагаемое в правой части равенства (38) при $x > x_0$ по абсолютной величине не превосходит

$$\frac{x - x_0}{V|q_0|} \left\{ \int_{x_0}^x |g(s)|^2 ds \right\}^{1/2} < \frac{x - x_0}{V|q_0|} \|g\|,$$

но в силу (34), (35) и (36) будет

$$\|g\|^2 = \left\| \int_{-a}^a \lambda F(\lambda) \varphi(x; \lambda) d\rho(\lambda) \right\|^2 = \int_{-a}^a |\lambda F(\lambda)|^2 d\rho(\lambda) \leq a^2,$$

так что

$$u(x) \leq \frac{a(x - x_0)}{V|q_0|} \quad (x > x_0). \quad (40)$$

При $x - x_0 < \frac{V|q_0|}{4a}$ будет

$$|y(x) - z(x)| < \frac{1}{4} < \frac{1}{4} f(x_0)$$

и, следовательно, для

$$\delta = \min \left\{ \delta_1, \frac{V|q_0|}{4a} \right\}$$

будет при $x_0 < x < x_0 + \delta$, в силу (37), (39), (40),

$$\begin{aligned} f(x) > y(x) &= z(x) + u(x) > \frac{1}{2} z(x_0) + u(x) = \\ &= \frac{1}{2} f(x_0) + u(x) > \frac{1}{4} f(x_0), \end{aligned}$$

что и требовалось установить.

Теорема 6 [108(2)]. Если при $x \geq 0$ выполнено неравенство $q(x) > q_0 > -\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ и для почти всех значений λ по спектральной мере $\rho(\lambda)$ найдется константа $C_\varepsilon(\lambda)$ такая, что при $x \geq 0$ будет

$$|\varphi(x; \lambda)| < C_\varepsilon(\lambda) |x|^{\frac{1}{2} + \varepsilon}. \quad (41)$$

Доказательство. Пусть $F(\lambda)$ есть произвольная функция из гильбертова пространства $\mathcal{L}_\rho^2(-a, a)$, в котором знак скалярного произведения и нормы будем сопровождать индексом ρ .

В силу леммы 2 имеем

$$\left| \int_{-a}^a F(\lambda) \varphi(x; \lambda) d\rho(\lambda) \right| < C \|F\|_{\rho},$$

то есть

$$|(F, \varphi)_{\rho}| < C \|F\|_{\rho},$$

откуда, в силу произвольности функции $F \in \mathcal{L}_{\rho}^2(-a, a)$, следует при любом $x \geq 0$ неравенство

$$\|\varphi\|_{\rho}^2 \leq C,$$

то есть

$$\int_{-a}^a |\varphi(x; \lambda)|^2 d\rho(\lambda) \leq C \quad (x \geq 0). \quad (42)$$

Положив теперь в формуле (33) $\lambda = a$, разобьем полуось $x \geq 0$ на интервалы длины

$$\delta = \frac{\pi}{3\sqrt{a - q_0}}$$

и обозначим середины этих интервалов через x_n ($n = 1, 2, \dots$), так что, в силу леммы 1, при $x_n < x < x_{n+1}$ будет либо

$$\left. \begin{aligned} |\varphi(x; \lambda)| &< 2 |\varphi(x_n; \lambda)|, \\ |\varphi(x; \lambda)| &< 2 |\varphi(x_{n+1}; \lambda)|. \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

Далее, из условия (42) следует, что ρ -мера множества тех λ , для которых при некотором $\varepsilon > 0$ и данном значении n выполнено неравенство

$$|\varphi(x_n; \lambda)| > C x_n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \quad (44)$$

будет меньше $1/C x^{1+2\varepsilon}$, то есть меньше $1/C_1 n^{1+2\varepsilon}$. Поэтому ρ -мера множества тех λ , для которых при некотором $\varepsilon > 0$ и при всех $n \geq m$ выполнено неравенство (44), будет меньше

$$\eta_m = \frac{1}{C_1} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}. \quad (45)$$

Таким образом, при $m \geq n$ для заданного $\varepsilon > 0$ и всех λ , за исключением множества ρ -меры, меньшей η_m , выполнено

неравенство

$$|\varphi(x_n; \lambda)| < Cx_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

а следовательно, и неравенство

$$|\varphi(x_n; \lambda)| < C_2 x_n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad (n = 1, 2, \dots):$$

Отсюда, используя неравенства (43), получаем при некотором значении постоянной $C_m = C$, некотором $\varepsilon > 0$, при всех $x \geq 0$ и всех λ , за исключением множества ρ -меры, меньшей η_m , неравенство

$$|\varphi(x; \lambda)| < Cx^{\frac{1}{2}+\varepsilon} \quad (0 \leq x < \infty). \quad (46)$$

Так как в силу (45) $\eta_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, то из полученного неравенства следует, что при некотором значении постоянной $C_\varepsilon(\lambda)$ соотношение (46) выполнено для почти всех λ по ρ -мере, что и требовалось установить.

С помощью других методов Ю. М. Березанскому, Г. И. Кацу и А. Г. Костюченко (см. [11]) удалось обобщить теорему 6 на многомерный случай. При этом показатель степени в правой части неравенства (41) будет $\frac{m}{2} + \varepsilon$, где $m \geq 1$ есть размерность евклидова пространства, пробегаемого точкой P .

В связи с вопросом о поведении решений в точках непрерывной части спектра см. также ниже п° 58.

56. Спектр дифференциального оператора Хилла. Имея в виду показать применение изложенных выше общих результатов к исследованию спектра одномерного двучленного дифференциального оператора с периодическим потенциалом, напомним сначала основные сведения из теории уравнения Хилла.

Уравнение Хилла имеет вид

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad (47)$$

где $q(x)$ — непрерывная периодическая функция, определенная на всей оси. Не ограничивая общности, будем считать период равным единице, так что при всех x

$$q(x+1) = q(x).$$

В этом пункте будем называть функцию периодической, если она имеет период, равный единице, и полупериодической, если при изменении аргумента на единицу она умножается на минус единицу.

Обозначим через $C(x; \lambda)$ и $S(x; \lambda)$ решения уравнения (47), удовлетворяющие начальным условиям

$$\begin{aligned} C(0; \lambda) &= 1, & C'(0; \lambda) &= 0, \\ S(0; \lambda) &= 0, & S'(0; \lambda) &= 1, \end{aligned} \quad (48)$$

так что общее решение имеет вид

$$y(x; \lambda) = \alpha C(x; \lambda) + \beta S(x; \lambda). \quad (49)$$

Далее,

$$y(x+1; \lambda) = \alpha C(x+1; \lambda) + \beta S(x+1; \lambda), \quad (50)$$

а поскольку функции $C(x+1; \lambda)$ и $S(x+1; \lambda)$, очевидно, также являются решениями уравнения (47), то

$$\begin{aligned} C(x+1; \lambda) &= a_{11}C(x; \lambda) + a_{21}S(x; \lambda), \\ S(x+1; \lambda) &= a_{12}C(x; \lambda) + a_{22}S(x; \lambda). \end{aligned} \quad (51)$$

Для получения общего решения уравнения (47) в форме Флоке [3] будем искать вспомогательное решение (49) этого уравнения, удовлетворяющее условию

$$y(x+1; \lambda) = \rho y(x; \lambda). \quad (52)$$

Подставляя (51) в (50) и пользуясь (52), получим для определения постоянных α и β в (50) однородную линейную систему уравнений, условием нетривиальной разрешимости которой является соотношение

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \rho & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \rho \end{vmatrix} = 0. \quad (53)$$

Из (48) и (51) следует

$$\begin{aligned} a_{11} &= C(1; \lambda), & a_{12} &= S(1; \lambda), \\ a_{21} &= C'(1; \lambda), & a_{22} &= S'(1; \lambda), \end{aligned}$$

так что уравнение (53) принимает вид

$$\rho^2 - [C(1; \lambda) + S'(1; \lambda)]\rho + 1 = 0.$$

Вводя целую трансцендентную функцию параметра λ

$$A(\lambda) = \frac{1}{2} [C(1; \lambda) + S'(1; \lambda)], \quad (54)$$

получаем уравнение

$$\rho^2 - 2A(\lambda)\rho + 1 = 0, \quad (55)$$

откуда определяются так называемые *мультипликаторы*

$$\rho_{1,2} = A(\lambda) \pm \sqrt{A^2(\lambda) - 1}. \quad (56)$$

Если при данном λ дискриминант $A^2(\lambda) - 1$ отличен от нуля, то существуют два линейно независимых решения $y_1(x; \lambda)$ и $y_2(x; \lambda)$ уравнения (47), удовлетворяющие условию (52). Очевидно, функции

$$\varphi_1(x; \lambda) = e^{-\mu_1 x} y_1(x; \lambda),$$

$$\varphi_2(x; \lambda) = e^{-\mu_2 x} y_2(x; \lambda),$$

где

$$e^{\mu_{1,2}} = \rho_{1,2}, \quad (57)$$

периодичны, откуда следует представление общего решения уравнения Хилла в форме Флоке

$$y(x; \lambda) = C_1 e^{\mu_1 x} \varphi_1(x; \lambda) + C_2 e^{\mu_2 x} \varphi_2(x; \lambda). \quad (58)$$

Данное вещественное значение параметра λ называется *устойчивым*, если все решения уравнения (47) остаются ограниченными при $|x| \rightarrow \infty$, и *неустойчивым* в противном случае.

Если мультипликаторы вещественны и различны, то из формулы Флоке (58) следует, что данное значение параметра λ неустойчиво. Если же мультипликаторы не вещественны, то они комплексно сопряжены, и так как их произведение, в силу (56), равно единице, то в этом случае $|\rho_{1,2}| = 1$, так что в (57) *характеристические показатели* $\mu_{1,2}$ мнимые и из формулы (58) следует, что данное значение параметра λ устойчиво.

Пусть теперь $\rho_1 = \rho_2 = \rho$. Тогда, согласно (56), имеем $\rho = \pm 1$ и, в силу (52), одно из решений уравнения (47) будет периодическим (при $\rho = 1$) или полупериодическим (при $\rho = -1$). Если при $\rho_1 = \rho_2$ оба решения периодичны (или полупериодичны), то данное значение параметра λ , очевидно, устойчиво. В противном случае второе решение $y_2(x; \lambda)$ будет удовлетворять соотношению

$$y_2(x+1; \lambda) = \rho [y_2(x; \lambda) + y_1(x; \lambda)], \quad (59)$$

где решение $y_1(x, \lambda)$ удовлетворяет условию (52). Очевидно, такое решение $y_2(x, \lambda)$ будет неограниченным, так что соответствующее значение параметра λ неустойчиво.

Легко видеть, что при больших по абсолютной величине, но отрицательных λ уравнение (47) имеет неограниченные решения. Поэтому множество λ -точек неустойчивости всегда содержит некоторую полупрямую $(-\infty, \lambda_0)$.

В частном случае, когда $q(x) \equiv 0$, область неустойчивости совпадает с полуосью $\lambda \leq 0$, а область устойчивости — с полуосью $\lambda > 0$. Для выяснения структуры области устойчивости в общем случае введем в рассмотрение две краевые задачи, порождаемые в $\mathcal{L}_2(0, 1)$ уравнением (47) при крайних условиях

$$y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1) \quad (60)$$

и соответственно

$$y(0) = -y(1), \quad y'(0) = -y'(1). \quad (61)$$

Из (48) и (54) вытекает, что спектр периодической краевой задачи (47); (60) совпадает с множеством корней уравнения

$$A(\lambda) - 1 = 0,$$

а спектр полупериодической краевой задачи (47), (61) — с множеством корней уравнения

$$A(\lambda) + 1 = 0.$$

С другой стороны, еще А. М. Ляпунов обнаружил (см., например, [53(4)], а также [3]), что спектры $\{\lambda'_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{\lambda''_k\}_{k=1}^{\infty}$ периодической и полупериодической краевой задачи связаны неравенствами

$$\lambda'_0 < \lambda''_1 \leq \lambda'_2 < \lambda''_2 \leq \lambda'_3 < \lambda''_3 \leq \lambda'_4 < \lambda''_4 < \lambda'_5 < \dots$$

Из всего вышеизложенного нетрудно заключить [3], что λ -область устойчивости состоит из открытых интервалов

$$(\lambda'_0, \lambda''_1), \quad (\lambda''_2, \lambda'_3), \quad (\lambda'_4, \lambda''_5), \dots, \quad (62)$$

а λ -область неустойчивости — из полуоси $(-\infty, 0]$ и замкнутых интервалов

$$[\lambda''_1, \lambda'_2], \quad [\lambda'_3, \lambda''_4], \dots, \quad (63)$$

называемых соответственно λ -зонами устойчивости и неустойчивости.

Если некоторое собственное значение периодической или полупериодической задачи оказывается кратным, то соответствующий отрезок системы (63) сводится к точке, а так как эта λ -точка будет устойчивой, то два соседних интервала системы (62), ограниченных с одной из сторон этой точкой, сольются в одну зону устойчивости. В частном случае, когда $q(x) \equiv 0$, все собственные значения периодической и полупериодической задачи двукратные и поэтому все зоны (62) сливаются в одну зону устойчивости $\lambda > 0$.

Пусть теперь оператор L определен в $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$ операцией Хилла

$$-y'' + q(x)y \quad [q(x+1) = q(x)].$$

В силу теоремы 34 п° 16 оператор Хилла L самосопряжен. Следующее предложение характеризует спектр оператора L .

Теорема 7 (см. [19 (2)]). Непрерывная часть спектра оператора Хилла L состоит из зон устойчивости с присоединенными к ним граничными точками зон неустойчивости. Дискретная часть спектра оператора L есть пустое множество, так что внутренние точки зон неустойчивости являются точками регулярности оператора L .

Доказательство. Сначала покажем, что $D(L) = \emptyset$.

Если $\lambda \in D(L)$, то, в силу теоремы 1 п° 53, соответствующая собственная функция должна стремиться к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, но из формул Флоке (58) и (59) следует, что таких решений не существует ни при каком вещественном значении параметра λ .

Поэтому $D(L) = \emptyset$, так что вторая часть теоремы доказана.

Так как множество $C(L)$ замкнуто, то для доказательства первой части теоремы достаточно установить, что любая точка λ -зоны устойчивости принадлежит $C(L)$, но никакая внутренняя точка λ -зоны неустойчивости не может принадлежать $C(L)$.

Если точка λ принадлежит зоне устойчивости, то соответствующее решение (58) ограничено при $|x| \rightarrow \infty$. Отсюда на основании теоремы 5 п° 54 следует, что $\lambda \in S(L)$, а так как $D(L) = \emptyset$, то $\lambda \in C(L)$.

Если же λ — любая внутренняя точка зоны неустойчивости, то решение $y(x; \lambda)$ при $|x| \rightarrow \infty$ не только не

ограничено, но и не удовлетворяет даже оценке (41). Отсюда на основании теоремы 6 заключаем, что спектральная мера рассматриваемой открытой зоны неустойчивости равна нулю, а следовательно, внутри этой зоны нет точек спектра $S(L)$, так что для любой внутренней точки λ каждой зоны неустойчивости имеем $\lambda \notin C(L)$. Теперь теорема доказана полностью.

Таким образом, спектр оператора Хилла чисто непрерывный с лакунами (63).

Другой путь определения спектра и получения формул обращения для одномерного и многомерного оператора Хилла принадлежит И. М. Гельфанду [27 (1)] (см. также дополнение В. Б. Лидского в [95 (2)]).

Из рассмотрений этого пункта следует, что вопрос об асимптотике длин лакун (63) сводится к нахождению асимптотических формул для собственных значений периодической и полупериодической краевой задачи Штурма — Лиувилля на конечном интервале. Обычными методами можно показать, что если периодический потенциал $q(x)$ имеет r непрерывных производных, то при больших λ длина лакуны с центром в точке λ есть $o(\lambda^{-r/2})$. Если же ничего не известно о дифференциальных свойствах функции $q(x)$, то нельзя гарантировать определенной быстроты убывания длин лакун, но все же можно утверждать, что при $\lambda \rightarrow \infty$ длина лакун стремится к нулю (см., например, [95 (2)], где функция $q(x)$ предполагается лишь кусочно-непрерывной).

Число лакун в последовательности (63) не обязательно бесконечно. Помимо тривиального случая, когда $q(x) \equiv 0$ и в $C(L)$ вовсе нет лакун, существуют непостоянные периодические потенциалы с конечным числом лакун в последовательности (63). В недавнем исследовании Н. И. Ахиезера [6 (5)] по заданной лакуне (точнее, по определенного вида спектральной функции $\rho(\lambda)$, постоянной при $\lambda < 0$, и в заданном интервале полуоси $\lambda > 0$, но растущей во всех остальных точках λ -оси) строится периодический потенциал, для которого эта лакуна является единственной в $C(L)$.

Вопрос о характере дискретного спектра, появляющегося в лакунах (63) при возмущении периодического потенциала бесконечно малым при $|x| \rightarrow \infty$ возмущением $\eta(x)$, не исследован. Некоторые случаи изучения множества собственных значений, вносимых возмущениями в лакуны спектра других операторов встречаются далее в п° 62 и 67.

Характер спектра, вносимого в первую, полубесконечную лакуну $(-\infty, \alpha_1)$ возмущениями $\eta(x)$ периодического потенциала $q(x)$, легко исследовать методами п° 30. С этой целью, предполагая без ограничения общности $\alpha_1 = 0$, преобразуем квадратичный функционал

$$\Phi[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \{y'^2 + q(x)y^2 + \eta(x)y^2\} dx$$

подстановкой $y = \varphi(x) z$ [13 (7)], где $\varphi(x)$ есть первая собственная функция краевой задачи (47), (60). Если при этом воспользоваться соотношением, вытекающим из интегрирования по оси $(-\infty, \infty)$ тождества

$$\{\varphi''(x) - q(x)\varphi(x)\}\varphi(x)y^2 \equiv 0$$

с любой финитной функцией $y \in \mathfrak{D}_L$, то для функционала $\Phi[y]$ получается выражение

$$\Phi[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^2(x) \{z'^2 + \eta(x)z^2\} dx.$$

Так как, далее, периодическая функция $\varphi(x)$ удовлетворяет двойному неравенству

$$0 < m \leq \varphi(x) \leq M < \infty,$$

то множитель $\varphi^2(x)$ под знаком последнего интеграла не играет существенной роли. Поэтому ряд результатов, установленных в п° 30 при исследовании функционала

$$F[z] = \int_{-\infty}^{\infty} \{z'^2 + \eta(x)z^2\} dx,$$

остается в силе для $\Phi[y]$. В частности, для оператора L_η , порождаемого возмущенной операцией Хилла

$$-y'' + q(x)y + \eta(x)y,$$

имеет место теорема 15 п° 30, в условии которой надо положить $n = 1$ и $q(x) = \eta(x)$.

57. Теорема Хартмана — Патнама о лакунах в спектре операторов с ограниченным потенциалом. Пусть L есть оператор, порождаемый в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ операцией

$$-y'' + q(x)y$$

с ограниченным потенциалом

$$|q(x)| \leq M. \quad (64)$$

Согласно теореме 17 п° 31 длина любой лакуны в $C(L)$ не превосходит M , но в действительности, подобно тому как это было в случае операции Хилла, длина лакун в $C(L)$, далеких от точки $\lambda = 0$, при некоторых дополнительных ограничениях на потенциал становится сколь угодно малой. Соответствующие тонкие результаты принадлежат Хартману и Патнаму [103 (2)].

Приводимая ниже теорема является одним из результатов этих авторов.

Теорема 8 [103 (2)]. Если функция $q(x)$ ограничена и равномерно непрерывна на полуоси $x \geq 0$, то длина лакуны в $C(L)$, расположенной правее точки λ , стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть произвольно задана величина $\varepsilon > 0$ и требуется найти число λ_ε такое, чтобы при любом $\lambda > \lambda_\varepsilon$ в интервал $(\lambda, \lambda + \varepsilon)$ попадали точки из $C(L)$. На основании теоремы 26 п° 9 достаточно при любом $\lambda > \lambda_\varepsilon$ установить предельное соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{N(t, \lambda + \varepsilon) - N(t, \lambda)\} = \infty$$

или, в силу известной связи между числом точек спектра $N(t, \lambda)$ регулярной краевой задачи, расположенных левее данной грани λ , и числом $\nu(t, \lambda)$ нулей решения уравнения (31) в интервале $(0, t)$, соотношение

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\nu(t, \lambda + \varepsilon) - \nu(t, \lambda)\} = \infty. \quad (65)$$

Будем считать число λ настолько большим, чтобы выполнялось условие

$$\lambda - M > \frac{\lambda}{4}, \quad (66)$$

так что решения $y(x; \lambda)$ уравнения (31) будут осциллировать. Последовательные нули функции $y(x; \lambda)$ обозначим через x_k ($k = 1, 2, \dots$).

Так как, далее, корни функций $y(x; \lambda)$ и $y'(x; \lambda)$ перемежаются, то при возрастании x от x_k до x_{k+1} дробь

$$\frac{y'(x; \lambda)}{\sqrt{\lambda} y(x; \lambda)}$$

непрерывно изменяется от $+\infty$ до $-\infty$. Отсюда следует, что с точностью до $O(1)$ функция $\nu(x, \lambda)$ равна

$$-\arctg \frac{y'}{\sqrt{\lambda} y} = \theta(x, \lambda) \quad (67)$$

и (65) эквивалентно предельному соотношению

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \{\theta(t, \lambda + \varepsilon) - \theta(t, \lambda)\} = \infty. \quad (68)$$

Из (67) и (31) легко получаем

$$\theta'(x, \lambda) = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} q(x) \frac{\lambda y^2(x; \lambda)}{\lambda y^2(x; \lambda) + y'^2(x; \lambda)},$$

откуда

$$\theta(t, \lambda) = \sqrt{\lambda} t + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^1 q(x) \frac{\lambda y^2(x; \lambda) dx}{\lambda y^2(x; \lambda) + y'^2(x; \lambda)} + \theta(0, \lambda). \quad (69)$$

В полученном представлении существенна однородность множителя при $q(x)$. Она позволяет в дальнейших оценках при возрастании t не следить под знаком интеграла в (69) за одним и тем же решением $y(x; \lambda)$, а в каждом интервале (x_k, x_{k+1}) заменять $y(x; \lambda)$ любым другим решением $y_k(x; \lambda)$ уравнения (31), удовлетворяющим условию $y_k(x_k; \lambda) = 0$.

Если число μ_k определено равенством

$$x_{k+1} - x_k = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_k}}, \quad (70)$$

то, в силу теоремы сравнения Штурма, будет

$$\lambda - \max_{x_1 \leq x \leq x_2} q(x) \leq \mu \leq \lambda - \min_{x_1 \leq x \leq x_2} q(x),$$

так что

$$\mu_k = \lambda - q(\xi_k), \quad (71)$$

где $x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1}$. Теперь одно из решений $y_k(x; \lambda)$ уравнения (31), обращающихся в нуль при $x = x_k$, очевидно будет удовлетворять интегральному уравнению

$$y_k(x; \lambda) = \sin \sqrt{\mu_k} (x - x_k) + \frac{1}{\sqrt{\mu_k}} \int_{x_k}^x Q_k(s) y_k(s; \lambda) \sin \sqrt{\mu_k} (x - s) ds, \quad (72)$$

где

$$Q_k(s) = q(s) - q(\xi_k). \quad (73)$$

Пользуясь интегральным уравнением (72), оценим решение $y_k(x; \lambda)$ на интервале $x_k \leq x \leq x_{k+1}$. Полагая

$$m_k = \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} |y_k(x; \lambda)|$$

и учитывая соотношения (70), (73), (64), получаем

$$m_k \leq 1 + \frac{2\pi M m_k}{\mu_k},$$

так что при достаточно больших λ будет

$$m_k \leq (1 - 2\pi M \mu_k^{-1}) \leq 2, \quad (74)$$

ибо, в силу (71), вместе с λ будет достаточно большим и μ_k . Снова используя интегральное уравнение (72) и соотношение (74), получаем при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно относительно k

$$\begin{aligned} y_k(x; \lambda) &= \sin \sqrt{\mu_k} (x - x_k) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right); \\ y'_k(x; \lambda) &= \sqrt{\mu_k} \cos \sqrt{\mu_k} (x - x_k) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \end{aligned} \quad (75)$$

Далее, из (71) следует

$$|\sqrt{\mu_k} - \sqrt{\lambda}| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right),$$

так что

$$y'_k(x; \lambda) = \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\mu_k} (x - x_k) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right). \quad (76)$$

Из асимптотических формул (75) и (76) получаем для множителя при $q(x)$ в (69) при $x_k \leq x \leq x_{k+1}$ и $\lambda \rightarrow \infty$ соотношение

$$\frac{\lambda y^2(x; \lambda)}{\lambda y^2(x; \lambda) + y'^2(x; \lambda)} = \sin^2 \sqrt{\mu_k} (x - x_k) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (77)$$

Теперь, пользуясь асимптотической формулой (77), покажем, что интеграл в представлении (69), деленный на t , то есть величина

$$\frac{1}{t} \int_0^t q(x) \frac{\lambda y^2(x; \lambda) dx}{\lambda y^2(x; \lambda) + y'^2(x; \lambda)}, \quad (78)$$

может быть представлен в виде суммы двух слагаемых, из которых первое не зависит от λ , а второе стремится к нулю при $\lambda \rightarrow \infty$ равномерно относительно t .

С этой целью, представляя правую часть соотношения (77) в виде

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2 \sqrt{\mu_k} (x - x_k) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

и выделяя из (78) не зависящее от λ слагаемое

$$\frac{1}{2t} \int_0^t q(x) dx, \quad (79)$$

покажем, что при $\lambda \rightarrow \infty$ интеграл

$$\frac{1}{t} \int_0^t q(x) \cos 2 \sqrt{\mu_k} (x - x_k) dx \quad (80)$$

стремится к нулю равномерно относительно t . При этом будет использована предположенная в условии теоремы равномерная непрерывность функции $q(x)$ на полуоси $x \geq 0$.

Интервал интегрирования $(0, t)$ в (80) можно заменить интервалом (x_1, x_n) , где $x_n \leq t < x_{n+1}$, так как, в силу соотношений (70) и (71), ошибка от этой замены будет при $\lambda \rightarrow \infty$ стремиться к нулю равномерно относительно t . Далее, поскольку, в силу соотношения (70),

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} \cos 2 \sqrt{\mu_k} (x - x_k) dx = 0 \quad (k = 1, 2, \dots),$$

то можно в (80) при $x_k \leq x < x_{k+1}$ заменить функцию $q(x)$ функцией $q(x) - q(x_k)$. После этого величина (80) сведется к выражению

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} [q(x) - q(x_k)] \cos 2 \sqrt{\mu_k} (x - x_k) dx,$$

которое по абсолютному значению мажорируется величиной

$$\frac{1}{t} \sum_{k=1}^n \int_{x_k}^{x_{k+1}} \omega_k dx = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) \omega_k, \quad (81)$$

где ω_k есть колебание функции $q(x)$ в интервале (x_k, x_{k+1}) . При достаточно большом λ длина интервала $x_{k+1} - x_k$, в силу (70), (71), станет сколь угодно малой, так что сколь угодно малым будет и каждое колебание ω_k ($k = 1, 2, \dots$), а следовательно, равномерно относительно t будет сколь угодно малым и среднее колебание (81)

Теперь представление (69) принимает вид

$$\theta(t, \lambda) = t \left[\sqrt{\lambda} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}t} \int_0^t q(x) dx + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} a(t, \lambda) \right], \quad (82)$$

где равномерно относительно t

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} a(t, \lambda) = 0. \quad (83)$$

Вместе с (82) имеет место формула

$$\begin{aligned} \theta(t, \lambda + \varepsilon) = t \left[\sqrt{\lambda + \varepsilon} + \frac{1}{2\sqrt{\lambda + \varepsilon}t} \int_0^t q(x) dx + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda + \varepsilon}} a(t, \lambda + \varepsilon) \right], \end{aligned}$$

так что для разности имеем

$$\begin{aligned} \theta(t, \lambda + \varepsilon) - \theta(t, \lambda) = \\ = t \left\{ \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\lambda}} - \frac{\varepsilon}{4\sqrt{\lambda^3}t} \int_0^t q(x) dx - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{\lambda^3}} a(t, \lambda + \varepsilon) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} [a(t, \lambda + \varepsilon) - a(t, \lambda)] + \dots \right\}, \end{aligned}$$

где точками заменены величины высшего порядка малости, чем ε . Второе и третье слагаемые в фигурных скобках могут быть сделаны малыми по сравнению с первым за счет выбора достаточно большого λ .

Если после этого перейти к пределу при $t \rightarrow \infty$, то четвертое слагаемое в фигурных скобках в силу (83) стремится к нулю. Таким образом, сколь мало бы ни было число $\varepsilon > 0$, при всех значениях λ , больших некоторого λ_ε , имеет место предельное соотношение (68), и теорема доказана полностью.

В цитированной статье Хартмана и Патнама [103 (2)] помимо результата, приведенного выше, получены дальнейшие сведения относительно асимптотики лакун при $\lambda \rightarrow \infty$. Смысл этих результатов состоит в том, что в предположении ограниченности и равномерной непрерывности $q'(x)$ длина лакун убывает быстрее, чем $1/\sqrt{\lambda}$, а в предположении ограниченности и равномерной непрерывности $q'(x)$ и $q''(x)$ — быстрее, чем $1/\lambda$.

Аналогичный результат можно получить с помощью теоремы 3^{bis} п° 54. Действительно, с помощью преобразования, указанного в [61 (1), (стр. 62)], легко показать, что при наличии у по-

тенциала $q(x)$ двух равномерно ограниченных производных, для любого решения уравнения (31) имеет место оценка

$$|\varphi(x; \lambda)| < A \exp M\lambda^{-3/2}x.$$

Таким образом, в условии теоремы 3^{bis} будет $\mu = \lambda^{-3/2}$, а тогда соотношение (30) n° 54 дает $\gamma = O(\lambda^{-1})$.

Остается, однако, неясным, будет ли приводить к дальнейшему понижению верхней грани длин лакун предположение о равномерной ограниченности дальнейших производных от потенциала, подобно тому как это имело место для периодических потенциалов. С другой стороны, нет уверенности в том, что требование равномерной непрерывности потенциала существенно для справедливости теоремы 8.

В своей электронной теории металлов [44] Зоммерфельд и Бете для случая периодического потенциала аргументируют убывание лакун в непрерывном спектре энергии тем, что при возрастании полной энергии $\lambda \rightarrow \infty$ все незначительнее должно сказываться влияние ограниченной потенциальной энергии $q(x)$, так что частица в своем поведении должна приближаться к свободной. Представляет интерес проверка этой аргументации для любого ограниченного потенциала.

58. О проблеме В. А. Стеклова в теории ортогональных многочленов и ее континуальном аналоге. Пусть $\{P_n(\lambda)\}_{n=0}^{\infty}$ есть система, полученная из последовательности степеней $1, \lambda, \lambda^2, \dots$ с помощью процесса ортогонализации Сони́на — Шмидта в метрике $\mathcal{L}_\sigma^2(0, 1)$, так что

$$\int_0^1 P_m(\lambda) \overline{P_n(\lambda)} d\sigma(\lambda) = \delta_{mn}. \quad (84)$$

Для любой функции $f(\lambda) \in \mathcal{L}_\sigma^2(0, 1)$ будет в смысле сходимости в $\mathcal{L}_\sigma^2(0, 1)$

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(\lambda), \quad (85)$$

где

$$c_n = \int_0^1 f(\lambda) \overline{P_n(\lambda)} d\sigma(\lambda).$$

Одним из основных вопросов теории ортогональных многочленов является исследование ряда Фурье — Чебышева (85) на сходимость в точке или равномерную сходимость. При этом оказывается, что классические теоремы о сходимости рядов Фурье переносятся на случай разложений в ряд Фурье —

Чебышева, если только многочлены, образующие ортонормированную систему, ограничены.

В связи с этим В. А. Стекловым [92] еще в 1921 г. была поставлена проблема об условиях ограниченности ортонормированной системы многочленов на всем интервале ортогональности или на его части (в терминах веса). При этом, ограничиваясь абсолютно непрерывными обложениями $\sigma(\lambda)$, В. А. Стеклов высказал предположение о равномерной ограниченности любой ортогональной системы многочленов на каждом сегменте $[\alpha, \beta]$, лежащем внутри интервала ортогональности $(0, 1)$ и не содержащем нулей веса $\rho(\lambda) = \sigma'(\lambda)$. Все известные системы многочленов от полиномов Лежандра до недавно построенных Н. И. Ахиезером [6(3)] многочленов, ортогональных на системе отрезков, оправдывают гипотезу В. А. Стеклова. Однако вопрос о справедливости этой гипотезы все еще остается открытым.

В своей монографии [30(2)], которая в значительной части посвящена проблеме В. А. Стеклова, Я. Л. Геронимус установил, что в случае равномерной ограниченности какой-нибудь бесконечной подпоследовательности $\{P_{n_k}(\lambda)\}$ на сегменте $[\alpha, \beta]$ будет $\rho(\lambda) \geq m > 1$ или, если не предполагать обложение абсолютно непрерывным,

$$\sigma(\mu) - \sigma(\lambda) \geq m(\mu - \lambda) \quad (\alpha < \lambda < \mu < \beta; m > 0). \quad (86)$$

Таким образом, предполагавшееся В. А. Стекловым условие ограниченности системы $\{P_n(\lambda)\}$ является необходимым.

В более широком смысле к проблеме В. А. Стеклова естественно относить все задачи, где по свойствам обложения требуется определить поведение последовательности $\{P_n(\lambda)\}$ при $n \rightarrow \infty$. Сюда, в частности, относится следующая теорема Я. Л. Геронимуса [30(2)]: если выполнено условие (86), то при произвольно малом фиксированном $\varepsilon > 0$ на сегменте $[\alpha + \varepsilon, \beta - \varepsilon]$ будут равномерно по n и λ ограничены средние

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n |P_k(\lambda)|^2. \quad (87)$$

Доказательство этой теоремы основано на обобщении результата Г. Сегё [86] и использовании одной специальной системы многочленов, построенной Н. И. Ахиезером [6(1)] в связи с некоторыми задачами аэродинамики.

Проблему В. А. Стеклова можно трактовать как одну из задач качественного спектрального анализа матриц Якоби. Эта задача заключается в план настоящей главы, ибо, в силу рекуррентного соотношения, многочлен $P_n(\lambda)$, как функция от n , является решением конечноразностного уравнения вида

$$-\alpha_{n+1}y_{n+1} + \beta_n y_n - \alpha_n y_{n-1} = \lambda y_n, \quad (88)$$

и речь идет о связи между поведением спектральной функции матрицы Якоби в точке λ и поведением решения уравнения (88) при $n \rightarrow \infty$.

В силу известных связей между бесконечными матрицами Якоби и сингулярной проблемой Штурма — Лиувилля (см., например, [6(4)]), должна существовать аналогия между поведением решений уравнений (88) и (31) п° 55 при $n \rightarrow \infty$ и $x \rightarrow \infty$ соответственно, в зависимости от свойств спектральной функции в окрестности точки λ . В частности, имеет место следующий дискретный аналог теоремы 6 п° 55, установленный Э. Э. Шнолем.

Теорема 9 [108(2)]. *При любом $\varepsilon > 0$ для почти всех значений λ по спектральной мере $\sigma(\lambda)$ имеет место оценка*

$$|P_n(\lambda)| \leq C(\lambda; \varepsilon) n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}. \quad (89)$$

Доказательство. В силу соотношения (74) при $t = n$, σ -мера того множества M_n точек λ , для которых при фиксированных C и $\varepsilon > 0$ имеет место неравенство

$$|P_n(\lambda)| \geq C n^{\frac{1}{2} + \varepsilon}, \quad (90)$$

не может превзойти

$$\frac{1}{C^2 n^{1+2\varepsilon}}.$$

Поэтому σ -мера множества $M = \sum_{n=1}^{\infty} M_n$ точек λ , в которых при данных C и $\varepsilon > 0$ неравенство (90) имеет место хотя бы при одном из значений $n = 1, 2, \dots$, не будет превосходить

$$\frac{1}{C^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\varepsilon}}.$$

Таким образом, на дополнительном множестве, σ -мера которого не менее

$$1 - \frac{1}{C^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\epsilon}},$$

требуемая оценка (89) с данным значением C имеет место при всех n . Поэтому σ -мера множества значений λ , на котором оценка (89) выполняется хотя бы при каком-нибудь значении $C = C(\lambda; \epsilon)$, равна

$$\lim_{C \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{C^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+2\epsilon}} \right) = 1,$$

что и требовалось установить.

В приведенном доказательстве соотношение (84) использовалось лишь при $m = n$. Таким образом, тот факт, что $\{P_n(\lambda)\}$ есть последовательность полиномов и что они взаимно ортогональны, не использовался. Это обстоятельство дает некоторое основание предполагать, что теорема 9 и ее континуальный аналог (теорема 6 п° 55) не являются окончательными.

Вопросы, рассмотренные в п° п° 53 и 55, естественно отнести к континуальной проблеме В. А. Стеклова. По сравнению со своим дискретным аналогом эта последняя изучена мало. Отметим, что проверка континуального аналога гипотезы В. А. Стеклова связана с оправданием той схемы, которая обычно применяется при исследовании энергетического спектра одномерного оператора Шредингера L в физической литературе. Дело в том, что в работах и руководствах по квантовой механике отходят от того определения, которое вытекает из постулатов квантовой механики и находится в полном соответствии со спектральной теорией операторов в гильбертовом пространстве. Там обычно считают, что спектр $S(L)$ есть множество значений λ , для которых решение $\varphi(x, \lambda)$ уравнения (31) остается ограниченным при $x \rightarrow \infty$.

Хотя в общем случае эта посылка не доказана, но в каждой конкретной задаче такой подход, в конце концов, оправдывается получением разложений в ряд или интеграл по специальным функциям, для которых формулы обращения были изучены еще в рамках классического анализа. Очевидно, такая ситуация не может удовлетворить требованиям

качественного спектрального анализа, когда решение задачи не доводится до спектрального разложения.

Таким образом, возникает вопрос о примирении «официального» и «рабочего» определения спектра.

Теорема 6 n° 55, принадлежащая Э. Э. Шнолю, является первым результатом, относящимся к этой задаче. Улучшить этот результат заменой всей правой части оценки (41) n° 55 на $C(\lambda)$ (см. [52]) невозможно, ибо, как показал В. П. Маслов [68], без дальнейших предположений относительно спектральной функции $\rho(\lambda)$ утверждение об ограниченности $\varphi(x, \lambda)$ почти всюду по ρ -мере неверно. Но соответствующий пример, построенный В. П. Масловым в [68], не опровергает континуального аналога гипотезы В. А. Стеклова, так как для этого примера не установлено неравенство типа (86). Отметим, что В. П. Маслову [68] удалось получить континуальный аналог оценки (87). Некоторые дальнейшие результаты, относящиеся к проблеме В. А. Стеклова для многочленов, получены недавно Я. Л. Геронимусом в [30(3)]. Однако вопрос о справедливости гипотезы В. А. Стеклова как в дискретном, так и в континуальном случае все еще остается открытым.

ГЛАВА VI

НЕКОТОРЫЕ ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ КАЧЕСТВЕННОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА

59. Различные обобщения критерия А. М. Молчанова
В п° 47 уже указывалось, что одномерный критерий дискретности, установленный в п° 28, существенно усложняется при переходе к многомерному оператору

$$-\Delta u + q(x)u \quad (1)$$

в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E}_m)$. В этой связи интересно отметить, что в более сложном случае оператора

$$(-1)^n \Delta^n u + q(x)u, \quad (2)$$

в отличие от оператора (1), одномерный критерий А. М. Молчанова сохраняется без изменений, если только порядок дифференциального оператора (2) выше размерности пространства ($2n > m$). Это было обнаружено М. Ш. Бирманом и Б. С. Павловым [14]. Их доказательство опирается на неравенство, аналогичное использованному в одномерном случае неравенству (17) п° 47. Оно имеет вид

$$\int_R |u^2(x) - u^2(x_0)| dx = \varepsilon(\omega) \int_R \left(\sum |D^{(n)}u|^2 + u^2 \right) dx, \quad (3)$$

где $2n > m$, R есть m -мерный куб с ребром ω , x_0 — любая точка из Ω , $\sum |D^{(n)}u|^2$ — сумма квадратов всех производных порядка n от функции u и

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \varepsilon(\omega) = 0.$$

Неравенство (3) получено в [14] с помощью интегральных представлений функций через их производные, близкие

к известным представлениям С. Л. Соболева (см. [90 (2)] и [89]).

Таким образом, в случае ограниченности снизу потенциала $q(x)$ для дискретности спектра оператора (2) при $2n > m$ ($m \geq 1$) необходимо и достаточно, чтобы было

$$\int_R q(x) dx \rightarrow \infty, \quad (4)$$

когда куб R , сохраняя размеры, уходит в бесконечность.

Другие обобщения критерия А. М. Молчанова связаны с освобождением его от требования ограниченности потенциала снизу. В действительности, поскольку ищется условие ограниченности снизу и дискретности спектра, обязательным является лишь требование полуограниченности самого оператора (1), но так далеко обобщить критерий А. М. Молчанова не удалось.

При изложении имеющихся обобщений ограничимся одномерным оператором Шредингера

$$-y'' + q(x)y \quad (-\infty < x < \infty). \quad (5)$$

Первое такое обобщение принадлежит И. Бринк [15], заменившей требование ограниченности снизу функции $q(x)$ условием

$$\int_t^x q(s) ds > -\gamma \quad (6)$$

в области $0 < x - t < \delta$, которое должно выполняться при некоторых положительных γ и δ . При этом остается в силе критерий дискретности А. М. Молчанова в форме (4). Очевидно, теорема И. Бринк дает возможность охватить неограниченные снизу, но быстро осциллирующие потенциалы.

Однако, как это недавно обнаружил Р. С. Исмагилов, форма (4) критерия А. М. Молчанова дискретности спектра оператора (5) не является универсальной. В своей заметке [46] он привел пример оператора (5) с ограниченным снизу и дискретным спектром, для которого, вопреки (4), при всех целых n будет

$$\int_n^{n+1} q(x) dx = 0.$$

Ослабив условие (6) и опираясь на принципы локализации (см. п° 11), Р. С. Исмагилов получил новую форму критерия дискретности спектра. Его результаты сводятся к следующему [46]:

Если существуют такие две измеримые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, что при некотором δ в полосе $0 < x - t < \delta$

$$\int_t^x q(s) ds > \alpha(x) + \beta(t) \quad (7)$$

и для всех отрезков ω длины единица при некотором $C < \infty$

$$\int_{\omega} \{\alpha^2(x) + \beta^2(x)\} dx \leq C, \quad (8)$$

то оператор (5) полуограничен. В частности, это имеет место при условии (6) И. Бринк, так как в (7) можно принять $\alpha(x) \equiv -\gamma$, $\beta(x) \equiv 0$, и тогда в (8) будет $C = \gamma^2$.

Если потенциал $q(x)$ удовлетворяет условиям (7), (8), то для дискретности спектра оператора (5) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие: если квадрат R_{α} плоскости (x, t) , определяемый неравенствами

$$0 \leq x - t \leq \delta, \quad \alpha \leq x + t \leq \alpha + \delta, \quad (9)$$

уходит в бесконечность, то функция двух переменных

$$Q(x, t) = \int_t^x q(s) ds,$$

рассматриваемая на квадратах R_{α} , стремится к бесконечности по мере. Последнее означает, что при любом M мера множества $\mathfrak{M}_{\alpha} \subset R_{\alpha}$, на котором $Q(x, t) < M$, стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \infty$.

Укажем еще на обобщение В. Б. Лидского (см. [63(2)], [63(3)]) критерия А. М. Молчанова на комплекснозначные потенциалы

$$q(x) = q_1(x) + iq_2(x).$$

Это обобщение состоит в том, что в случае ограниченности снизу функции $q_1(x)$ и полуограниченности функции $q_2(x)$ критерий дискретности спектра оператора (5) имеет вид (4), где подынтегральную функцию $q(x)$ следует заменить на $q_1(x) + |q_2(x)|$.

В заключение отметим, что обобщение критерия дискретности на матричные потенциалы не известно.

60. Об отрицательной части спектра многомерных двухчленных операторов высших порядков. Как и в предыдущем пункте, простые по форме результаты об отрицательной части спектра оператора (2) получаются при $2n > m$. Соответствующие теоремы вложения привели М. Ш. Бирмана и Б. С. Павлова [14] к следующим выводам.

Критерием h -устойчивой дискретности отрицательной части спектра оператора (2) при $2n > m$ и $q(x) \leq 0$ является предельное соотношение

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \int_{|z-x| \leq a} q(z) dz = 0. \quad (10)$$

Это же соотношение при любом знаке потенциала обеспечивает совпадение непрерывной части спектра с полуосью $\lambda \geq 0$.

Критерием h -устойчивой конечности отрицательной части спектра оператора (2) при $2n > m$ и $q(x) \leq 0$ является условие

$$\lim_{b \rightarrow \infty} b^{2n-m} \int_{|x| \geq b} q(x) dx = 0$$

или

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \ln b \int_{|x| \geq b} |x|^{2n-m} q(x) dx = 0$$

соответственно при нечетном или четном m .

В одномерном случае указанные выше результаты совпадают с установленными в главе II.

При $2n \leq m$, как и в условиях теоремы А. М. Молчанова для многомерного оператора Шредингера, возникают определенные осложнения.

Впрочем, критерий (10) остается в силе и при $2n \leq m$, если дополнительно предполагать потенциал ограниченным. При $m \geq 3$ и $n = 1$ достаточным условием h -устойчивой конечности отрицательной части спектра оператора (2) является соотношение

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \rho \int_{\rho}^{\infty} q^*(r, \theta) dr = 0, \quad (11)$$

где θ означает совокупность всех угловых координат. Как было показано в п° 30, в случае отрицательного потенциала

и $m = 1$ условие (11) является также и необходимым. Необходимость этого условия сохраняется при любом $m \geq 3$ для потенциалов $q(x) = q(|x|) \leq 0$. При $m = 2$ условие (11) заменяется соотношением

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} \ln \rho \int_{\rho}^{\infty} r q^*(r, \theta) dr = 0.$$

61. Алгебраическое исследование спектра оператора энергии гармонического осциллятора. Стационарное уравнение Шредингера для одномерного гармонического осциллятора имеет вид

$$-y'' + x^2 y = \lambda y \quad (-\infty < x < \infty). \quad (12)$$

Если положить $\mathcal{P} = i \frac{d}{dx}$, а через $\mathcal{Q}$ обозначить оператор умножения на x в $\mathcal{L}_2(-\infty, \infty)$, то определяемый левой частью уравнения (12) оператор $\mathcal{H}$ полной энергии осциллятора можно будет представить в виде

$$\mathcal{H} = \mathcal{P}^2 + \mathcal{Q}^2, \quad (13)$$

где

$$\mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{P} = iI. \quad (14)$$

Дирак [41] нашел спектр самосопряженного оператора $\mathcal{H}$ в абстрактном гильбертовом пространстве H , опираясь лишь на соотношения (13) и (14). Приводимое ниже изложение в основном принадлежит Н. И. Ахиезеру.

Так как

$$(\mathcal{P} + i\mathcal{Q})(\mathcal{P} - i\mathcal{Q}) = \mathcal{P}^2 - i(\mathcal{P}\mathcal{Q} - \mathcal{Q}\mathcal{P}) + \mathcal{Q}^2,$$

то

$$(\mathcal{P} + i\mathcal{Q})(\mathcal{P} - i\mathcal{Q}) = \mathcal{H} - I \quad (15)$$

и, аналогично,

$$(\mathcal{P} - i\mathcal{Q})(\mathcal{P} + i\mathcal{Q}) = \mathcal{H} + I. \quad (16)$$

Умножая (15) слева, а (16) справа на $\mathcal{P} - i\mathcal{Q}$, получаем соотношение

$$(\mathcal{P} - i\mathcal{Q})(\mathcal{H} - I) = (\mathcal{H} + I)(\mathcal{P} - i\mathcal{Q}) \quad (17)$$

и, аналогично, соотношение

$$(\mathcal{H} - I)(\mathcal{P} + i\mathcal{Q}) = (\mathcal{P} + i\mathcal{Q})(\mathcal{H} + I). \quad (18)$$

Из соотношения (15) вытекает неотрицательность оператора $\mathcal{H} - I$, так что искомый спектр $S(\mathcal{H})$ лежит в интервале $[1, \infty]$.

Предположим теперь, что оператор $\mathcal{H}$ имеет хотя бы одно собственное значение $\lambda \geq 1$, так что

$$\mathcal{H}f = \lambda f \quad (\|f\| = 1),$$

и положим

$$g = (\mathcal{P} - i\mathcal{Q})f.$$

Если $g = 0$, то в силу (15) будет

$$\mathcal{H}f = f,$$

так что $\lambda = 1$.

Если же $g \neq 0$, то в силу (17) будет

$$(\lambda - 1)g = (\mathcal{H} + I)g,$$

откуда

$$\mathcal{H}g = (\lambda - 2)g,$$

так что число $\lambda - 2$ также является собственным значением.

Повторяя предыдущее рассуждение, получим, что либо $\lambda - 2 = 1$, то есть $\lambda = 3$, либо число $\lambda - 4$ также является собственным значением. Так как оператор $\mathcal{H}$ ограничен снизу, то при дальнейшем повторении этого рассуждения, в конце концов, второй случай станет невозможным. Таким образом, число $\alpha = 1$ окажется собственным значением оператора $\mathcal{H}$, а исходное его собственное значение λ окажется целым нечетным числом.

Но, с другой стороны, из формулы (18) следует, что если имеет место (19), то элемент

$$g = (\mathcal{P} + i\mathcal{Q})f$$

удовлетворяет уравнению

$$\mathcal{H}g = (\lambda + 2)g.$$

При этом $g \neq 0$, ибо в противном случае из (16) следовало бы равенство $\mathcal{H}f + f = 0$, противоречащее неотрицательности оператора $\mathcal{H} - I$.

Проведенными рассуждениями установлено, что собственными значениями оператора $\mathcal{H}$ могут быть только положительные нечетные числа, и все они в действительности будут собственными значениями, если $D(\mathcal{H}) \neq 0$.

Теорема 1. Спектр самосопряженного оператора $\mathcal{H}$ состоит из собственных значений

$$\lambda_k = 2k + 1 \quad (k = 0, 1, \dots). \quad (20)$$

Для доказательства теоремы остается установить, что никакое значение μ , отличное от нечетного числа, не может принадлежать $C(\mathcal{H})$.

Обозначим через E_λ спектральную функцию оператора $\mathcal{H}$ и предположим, что $\mu \notin D(\mathcal{H})$, но $\mu \in C(\mathcal{H})$. Тогда для достаточно малого $\varepsilon > 0$ при $\Delta = (\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ в $E(\Delta)H$ найдется нормированный элемент f , отличный от собственного вектора оператора $\mathcal{H}$. Для элемента f будет

$$\|\mathcal{H}f - \mu f\| < \varepsilon.$$

В силу (15) элемент

$$g = (\mathcal{P} - iQ)f$$

будет отличен от нуля, а в силу (17) будет

$$(\mathcal{P} - iQ)(\mathcal{H} - I)f = (\mathcal{H} + I)g$$

или

$$(P - iQ)(\mathcal{H}f - \mu f) + (\mu - 1)g = (\mathcal{H} + I)g,$$

то есть

$$\mathcal{H}g - (\mu - 2)g = (\mathcal{P} - iQ)f_1, \quad (21)$$

где

$$f_1 = \mathcal{H}f - \mu f.$$

Так как оператор $\mathcal{H}$ ограничен в $E(\Delta)H$, а $f_1 \in E(\Delta)H$, то величина

$$\|(\mathcal{P} - iQ)f_1\|^2 = ([\mathcal{H} - I]f_1, f_1)$$

может быть сделана сколь угодно малой вместе с ε .

Таким образом, норма правой части (21) при надлежащем выборе элемента g может стать сколь угодно малой, откуда вытекает принадлежность к $C(\mathcal{H})$ числа $(\mu - 2)$. Повторяя рассуждение, получим, в конце концов, что некоторое отрицательное число принадлежит $C(\mathcal{H})$, а это противоречит неотрицательности оператора $\mathcal{H} - I$.

Поэтому множество $C(\mathcal{H})$ должно быть пусто, и теорема доказана.

Из соотношений (13) и (14) не следует простота спектра оператора $\mathcal{H}$. Но простоту всех собственных значений сингулярной задачи (12) установить легко. Так, например, про-

стота первого собственного значения следует из того, что соответствующая ему собственная функция не должна иметь нулей, а после этого простота остальных собственных значений вытекает из приведенных выше рассуждений.

Если спектр оператора $\mathcal{H}$ простой и $\{e_k\}_{k=0}^{\infty}$ есть ортонормированный базис собственных элементов, соответствующих спектру (20), то в силу рассуждений, предшествовавших формулировке теоремы, будет

$$\left. \begin{aligned} (\mathcal{P} - i\mathcal{Q}) e_0 &= 0, \\ (\mathcal{P} - i\mathcal{Q}) e_k &= \alpha_k e_{k-1}, \\ (\mathcal{P} + i\mathcal{Q}) e_k &= \beta_k e_{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (22)$$

Далее,

$$\begin{aligned} \alpha_k (e_{k-1}, e_{k-1}) &= ([\mathcal{P} - i\mathcal{Q}] e_k, e_{k-1}) = \\ &= (e_k, [\mathcal{P} + i\mathcal{Q}] e_{k-1}) = \bar{\beta}_{k-1} (e_k, e_k), \end{aligned}$$

так что

$$\alpha_k = \bar{\beta}_{k-1} \quad (k = 1, 2, \dots).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} |\alpha_k|^2 (e_{k-1}, e_{k-1}) &= ([\mathcal{P} - i\mathcal{Q}] e_k, [\mathcal{P} - i\mathcal{Q}] e_k) = \\ &= ([\mathcal{H} - I] e_k, e_k) = 2k \quad (k = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно считать числа $i\alpha_k$ положительными. Действительно, если $i\alpha_k = |\alpha_k| e^{i\varphi_k}$, то после перехода к базису

$$e'_k = e_k e^{-i\psi_k}$$

получили бы

$$(\mathcal{P} - i\mathcal{Q}) e'_k = -e^{i(\varphi_k - \psi_k + \psi_{k-1})} |\alpha_k| e'_{k-1}.$$

Теперь достаточно было бы определить числа ψ_r из условий

$$\psi_0 = 0, \quad \psi_r - \psi_{r-1} = \varphi_r \quad (r = 1, 2, \dots).$$

Итак, в (22) можно принять

$$\alpha_k = -i \sqrt{2k}, \quad \beta_{k-1} = i \sqrt{2k},$$

откуда вытекают равенства

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}e_k &= \frac{1}{2i} \{(\mathcal{P} + i\mathcal{Q})e_k - (\mathcal{P} - i\mathcal{Q})e_k\} = \\ &= \frac{1}{2i} (\beta_k e_{k+1} - \alpha_k e_{k-1}) = \sqrt{\frac{k+1}{2}} e_{k+1} + \sqrt{\frac{k}{2}} e_{k-1}, \\ \mathcal{P}e_k &= \frac{1}{2} \{(\mathcal{P} - i\mathcal{Q})e_k + (\mathcal{P} + i\mathcal{Q})e_k\} = \\ &= \frac{1}{2i} (\alpha_k e_{k-1} + \beta_k e_{k+1}) = i \sqrt{\frac{k+1}{2}} e_{k+1} - i \sqrt{\frac{k}{2}} e_{k-1}.\end{aligned}$$

Таким образом, в базисе $\{e_k\}$ оператор $\mathcal{H}$ определяется диагональной матрицей с элементами $h_{kk} = 2k + 1$, а операторы $\mathcal{P}$ и $\mathcal{Q}$ — якобиевыми матрицами с элементами

$$p_{k,k+1} = \bar{p}_{k+1,k} = -i \sqrt{\frac{k}{2}}, \quad p_{kk} = 0$$

и

$$q_{k,k+1} = q_{k+1,k} = \sqrt{\frac{k}{2}}, \quad q_{kk} = 0$$

соответственно.

Решение рассмотренной задачи на основе одних лишь соотношений (13), (14) без дополнительного предположения о простоте спектра дано Ф. Реллихом в [83 (3)].

62. Оператор Дирака. Этот оператор T в пространстве $\mathcal{L}_2(\mathcal{E}_3)$ четырехкомпонентных вектор-функций $\varphi(\mathbf{x}) = \{\varphi_k(\mathbf{x})\}_{k=1}^4$ имеет вид

$$T\varphi = (\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4) \varphi + r(\mathbf{x}) \varphi,$$

где $p_k = -i \frac{\partial}{\partial x_k}$, $r(\mathbf{x})$ — скалярный потенциал внешнего поля, а α_k — четыре числовые эрмитовы матрицы четвертого порядка, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_j \alpha_k = -\alpha_k \alpha_j \quad (j \neq k), \quad (23)$$

причем квадрат каждой из них равен единичной матрице E .

В случае свободного релятивистского электрона будет $r(\mathbf{x}) = 0$, так что оператор Дирака принимает вид

$$T_0 \varphi = P \varphi + \alpha_4 \varphi,$$

где

$$P \varphi = \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3.$$

Для определения спектра $S(T_0)$ будем исходить из легко проверяемого алгебраического соотношения

$$T_0^2 = P^2 + I. \quad (24)$$

Так как, очевидно, спектр оператора P заполняет всю ось, то, в силу (24), спектр $S(T_0^2)$ заполняет полуось $[1, \infty)$. Поэтому из любых двух вещественных и одинаковых по модулю значений λ , удовлетворяющих неравенству $|\lambda| \geq 1$, по крайней мере одно принадлежит $S(T_0)$. Для того чтобы установить принадлежность обоим этих значений спектру $S(T_0)$, достаточно доказать симметричность множества $S(T_0)$ относительно точки $\lambda = 0$.

С этой целью привлечем пятую эрмитову матрицу $\alpha_5 (\alpha_5^2 = E)$, удовлетворяющую вместе с матрицами α_k ($k = 1, 2, 3, 4$) соотношениям (23) (см. [96]).

Если теперь $\lambda \in S(T_0)$, то при любом $\varepsilon > 0$ для некоторой вектор-функции φ будет

$$\|T_0\varphi - \lambda\varphi\| < \varepsilon\|\varphi\|.$$

Но тогда для вектор-функции $\alpha_5\varphi$ будет

$$T_0\alpha_5\varphi + \lambda\alpha_5\varphi = -\alpha_5(T_0\varphi - \lambda\varphi),$$

так что

$$\|T_0\alpha_5\varphi + \lambda\alpha_5\varphi\| = \|T_0\varphi - \lambda\varphi\| < \varepsilon\|\varphi\| = \varepsilon\|\alpha_5\varphi\|$$

и, значит, $(-1)\lambda \in S(T_0)$.

Таким образом, спектр $S(T_0)$ заполняет всю ось, за исключением интервала $(-1, 1)$, являющегося лакуной в $S(T_0)$.

Будем теперь рассматривать оператор T как возмущение оператора T_0 потенциалом $r(x)$ и исследуем спектр, вносимый этим возмущением в лауну $(-1, 1)$. Эта задача, очевидно, эквивалентна изучению отрицательной части спектра оператора $T^2 - I$. Имея в виду получить условия дискретности и конечности спектра оператора T в интервале $(-1, 1)$, рассмотрим оператор $T^2 - \beta^2 I$, где $0 < \beta \leq 1$.

Имеем

$$\begin{aligned} (T^2\varphi, \varphi) &= ([T_0 + rI]^2\varphi, \varphi) = \\ &= (T_0^2\varphi, \varphi) + 2\operatorname{Re}(T_0\varphi, r\varphi) + (r^2\varphi, \varphi) = \\ &= (P^2\varphi, \varphi) + (\varphi, \varphi) + 2\operatorname{Re}(P\varphi, r\varphi) + \\ &\quad + 2\operatorname{Re}(\alpha_4\varphi, r\varphi) + (r^2\varphi, \varphi), \end{aligned}$$

так что

$$([T^2 - \beta^2 I] \varphi, \varphi) = \\ = ([P + rI]^2 \varphi, \varphi) + 2 \operatorname{Re} (\alpha_4 \varphi, r\varphi) + (1 - \beta^2) (\varphi, \varphi).$$

Если

$$([T^2 - \beta^2 I] \varphi, \varphi) < 0, \quad (25)$$

то, тем более,

$$([P + rI]^2 \varphi, \varphi) - 2 (\varphi, |r| \varphi) + (1 - \beta^2) (\varphi, \varphi) < 0$$

и, в силу элементарного неравенства

$$\|(P + rI) \varphi\|^2 > \frac{1}{2} \|P\varphi\|^2 - \|r\varphi\|^2,$$

будет

$$(P^2 \varphi, \varphi) - 2 ([r^2 + 2|r|] \varphi, \varphi) + \varepsilon (\varphi, \varphi) < 0,$$

где $\varepsilon = 2(1 - \beta^2)$.

Последнее неравенство можно представить в виде

$$\int_{\mathbb{R}^3} \{ |\nabla \varphi|^2 - 2(r^2 + 2|r|) |\varphi|^2 \} d\mathbf{x} < -\varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi|^2 d\mathbf{x}, \quad (26)$$

где

$$|\varphi|^2 = \sum_{k=1}^4 |\varphi_k|^2, \quad |\nabla \varphi|^2 = \sum_{k=1}^4 |\nabla \varphi_k|^2.$$

Интеграл в левой части неравенства (26) есть квадратичный функционал, порождаемый оператором Шредингера

$$-\Delta \varphi - 2(2|r| + r^2) \varphi \quad (27)$$

в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^3)$, и это позволяет воспользоваться готовыми теоремами об отрицательной части спектра оператора Шредингера.

Если левее точки $-\varepsilon < 0$ спектр оператора (27) исчерпывается конечным множеством собственных значений конечной кратности, то максимальная размерность линейных многообразий, на которых выполнено неравенство (26), конечна и, следовательно, такова же максимальная размерность многообразия, на котором выполнено неравенство (25). Последнее означает, что часть спектра оператора T^2 , лежащая левее точки β^2 , исчерпывается конечным множеством собственных значений конечной кратности и, следовательно, такова же часть спектра оператора T , лежащая в интервале $(-\beta, \beta)$.

Таким образом, если для потенциала $-2(2|r| + r^2)$ оператора Шредингера (27) выполнено какое-нибудь условие дискретности или конечности отрицательной части спектра этого оператора (см. п° п° 46 и 48), то возмущение $r(x)$ вносит в лауну $(-1, 1)$ спектра оператора Дирака T_0 лишь изолированное (соответственно конечное) множество собственных значений.

Примеры конкретных условий дискретности или конечности спектра $S(T)$ в интервале $(-1, 1)$ дают теоремы 2 и 6 главы IV.

Строгое исследование спектра $S(T)$ в интервале $(-1, 1)$ при условии ограниченности потенциала $r(x)$ проведено М. Ш. Бирманом в [13(7)], где доказана следующая

Теорема 2 [13(7)]. *При возмущении свободного релятивистского электрона ограниченным потенциалом $r(x)$, абсолютная величина $|r(x)|$ которого удовлетворяет условию вида (10), будет $S(T) = S(T_0)$, так что в лауне $(-1, 1)$ спектра $S(T_0)$ может появиться лишь дискретный спектр. Если, кроме того, $r(x) \geq 0$ при больших $|x|$, то этот дискретный спектр не может сгущаться к точке $\lambda = \pm 1$. Наконец, если потенциал $r(x)$ удовлетворяет условию вида (11), то и в интервале $(-1, 1)$ оператор T имеет лишь конечное число собственных значений.*

В [13(7)] также получены оценки сверху для числа собственных значений оператора T в интервале $(-\beta, \beta)$ при $|\beta| < 1$.

Достаточные признаки бесконечности множества собственных значений оператора T , попадающих в лауну $(-1, 1)$ при условии (10), неизвестны.

63. Оператор Паули. Волновые уравнения Паули для электрона в магнитном поле имеют вид [96]

$$P\psi_1 - eq\psi_1 + \mu_0 \{H_z\psi_1 + (H_x - iH_y)\psi_2\} = i\hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t},$$

$$P\psi_2 - eq\psi_2 + \mu_0 \{(H_x + iH_y)\psi_1 + H_z\psi_2\} = i\hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t},$$

где

$$P\psi_k = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi_k - \frac{i\hbar e}{mc} \langle A, \nabla \psi_k \rangle + \frac{e^2}{2mc^2} |A|^2 \psi_k \quad (k = 1, 2).$$

Здесь заданными функциями точки $x \in \mathcal{E}$ являются вектор A (векторный потенциал магнитного поля), удовлетворяющий

условию $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, вектор $\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ (напряженность магнитного поля) и скаляр q (потенциальная энергия). Треугольными скобками обозначено скалярное произведение в $\mathcal{E}$.

Оператор Паули имеет, таким образом, вид

$$P\psi + Q(\mathbf{x})\psi,$$

где $\psi = \{\psi_1, \psi_2\}$ есть двухкомпонентная вектор-функция точки, $P\psi = \{P\psi_1, P\psi_2\}$ и

$$Q(\mathbf{x}) = \mu_0 \begin{pmatrix} H_z - \frac{e}{\mu_0} q & H_x + iH_y \\ H_x - iH_y & -H_z - \frac{e}{\mu_0} q \end{pmatrix}.$$

Наименьшее и наибольшее собственные значения матрицы $Q(\mathbf{x})$ равны соответственно

$$\nu_1(\mathbf{x}) = -eq(\mathbf{x}) - \mu_0 H(\mathbf{x}), \quad \nu_2(\mathbf{x}) = -eq(\mathbf{x}) + \mu_0 H(\mathbf{x}),$$

где

$$H(\mathbf{x}) = \sqrt{H_x^2 + H_y^2 + H_z^2}.$$

Для гладкой вещественной финитной вектор-функции имеет место тождество

$$\begin{aligned} (P\psi, \psi) &= \sum_{k=1}^2 (P\psi_k, \psi_k) = \\ &= \sum_{k=1}^2 \int_{\mathcal{E}} \left\{ -\frac{\hbar}{2m} \psi_k \Delta \psi_k - \frac{i\hbar e}{mc} \langle \mathbf{A}\psi_k, \nabla \psi_k \rangle + \frac{e^2}{2mc^2} |\mathbf{A}|^2 \psi_k^2 \right\} d\mathbf{x} = \\ &= \sum_{k=1}^2 \int_{\mathcal{E}} \left\{ \frac{\hbar^2}{2m} |\nabla \psi_k|^2 - \frac{i\hbar e}{mc} \langle \mathbf{A}\psi_k, \nabla \psi_k \rangle + \frac{e^2}{2mc^2} |\mathbf{A}|^2 \psi_k^2 \right\} d\mathbf{x} = \\ &= \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^2 \int_{\mathcal{E}} \left| i\hbar \nabla \psi_k - \frac{e}{c} \mathbf{A}\psi_k \right|^2 d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

из которого следует неотрицательность оператора P в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E})$.

На основании указаний п° 36 получаем, что при выполнении условия

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \{eq(\mathbf{x}) + \mu_0 H(\mathbf{x})\} = -\alpha$$

часть спектра действующего в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E})$ оператора Паули, расположенная левее точки α , будет ограничена снизу

дискретна, а при выполнении условия

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \{eq(x) + \mu_0 H(x)\} = -\infty$$

весь спектр оператора Паули будет дискретным с единственной предельной точкой $\lambda = +\infty$ [31 (7)].

Рассмотрим еще случай, когда

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} q(x) = \lim_{|x| \rightarrow \infty} H(x) = 0, \quad (28)$$

предполагая дополнительно, что при некотором $\delta > 0$ и $|x| \rightarrow \infty$

$$H(x) = o(|x|^{-(1+\delta)}). \quad (29)$$

Обобщая в этих предположениях на все $\mathbb{E}$ формулу, известную для ограниченной области [106], получим

$$A = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{E}} \frac{[e(x, z) \times H(z)]}{|x - z|^2} dz, \quad (30)$$

где $e(x, z)$ есть единичный вектор направления $x - z$.

Из (29) и (30) следует предельное соотношение

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} A(x) = 0. \quad (31)$$

Покажем, что из этого соотношения вытекает непрерывность положительной части спектра оператора

$$-\Delta u + a \langle A, \nabla u \rangle + b |A|^2 u, \quad (32)$$

где a и b — постоянные коэффициенты.

Так как положительная часть спектра оператора $-\Delta$ покрывает полуось $\lambda \geq 0$, то при $\lambda_0 \geq 0$ существует система гладких нормированных финитных функций $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ с непересекающимися носителями ω_n , для которой

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta u_n + \lambda_0 u_n\| = 0. \quad (33)$$

Имеем, далее,

$$\begin{aligned} \|\langle A, \nabla u_n \rangle\|^2 &\leq \|(|A| \cdot |\nabla u_n|)\|^2 \leq \max_{x \in \omega_n} |A(x)|^2 \int_{\omega_n} |\nabla u_n|^2 dx = \\ &= \max_{x \in \omega_n} |A(x)|^2 \int_{\omega_n} |\Delta u_n \cdot u_n| dx \leq \max_{x \in \omega_n} |A(x)|^2 \|\Delta u_n\|. \end{aligned}$$

Так как, в силу (33), величины $\|\Delta u_n\|$ ограничены при $n \rightarrow \infty$, то из (31) и последнего неравенства следует, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\langle A, \nabla u_n \rangle\| = 0.$$

Таким образом, имеет место предельное соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\Delta u_n + a \langle A, \nabla u_n \rangle + b |A|^2 u_n - \lambda_0 u_n\| = 0,$$

из которого вытекает, что положительная часть спектра оператора (32) покрывает полуось $\lambda \geq 0$.

Так как, далее, из условий (28) следует, что оба собственных значения $v_1(x)$ и $v_2(x)$ матрицы $Q(x)$ стремятся к нулю при $|x| \rightarrow \infty$, то норма матрицы $Q(x)$ также стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$.

В соответствии с указаниями п° 36, учитывая неотрицательность оператора P , заключаем, что при условиях (28), (29) непрерывная часть спектра оператора Паули совпадает с полуосью $\lambda \geq 0$ [31 (7)].

64. О спектре оператора энергии системы многих частиц. В простейшем случае, когда неподвижное ядро принято за начало координат и имеется всего лишь две частицы, этот оператор $\mathcal{H}$ имеет вид [34]

$$\mathcal{H}\psi \equiv -\Delta_1\psi - \Delta_2\psi + \{U_1(r_1) + U_2(r_2) + U_{12}(r_1, r_2)\}\psi, \quad (34)$$

где $r_1(x_1, x_2, x_3)$ и $r_2(x_4, x_5, x_6)$ — радиусы-векторы частиц,

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}, \quad \Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_5^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_6^2},$$

а

$$U_{12}(r_1, r_2) = U_{12}(|r_2 - r_1|) \quad (35)$$

— потенциал взаимодействия этих частиц, удовлетворяющий условию

$$\lim_{r_{12} \rightarrow \infty} U_{12}(r_1, r_2) = 0, \quad (36)$$

где $r_{12} = |r_{12}|$ и $r_{12} = r_2 - r_1$.

Вместе с этим условием будем предполагать выполненными предельные соотношения

$$\lim_{r_1 \rightarrow \infty} U_1(r_1) = \lim_{r_2 \rightarrow \infty} U_2(r_2) = 0. \quad (37)$$

Оператор $\mathcal{H}$ можно также записать в виде

$$\mathcal{H}\psi = -\Delta\psi + q(\mathbf{x})\psi, \quad (38)$$

где ψ есть функция точки $\mathbf{x} \in \mathbb{E}_6$ и

$$q(\mathbf{x}) = U_1(\mathbf{r}_1) + U_2(\mathbf{r}_2) + U_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (39)$$

В случае кулоновского взаимодействия получаем оператор

$$\mathcal{H}\psi = -\Delta\psi - \left(\frac{b_1}{r_1} + \frac{b_2}{r_2} - \frac{c_{12}}{r_{12}} \right) \psi, \quad (40)$$

который при определенных значениях постоянных b_1 , b_2 и c_{12} совпадает с оператором энергии атома гелия.

Формально оператор (38) совпадает с рассмотренным в главе IV, но в случае системы частиц возникают дополнительные трудности, связанные с тем, что, вообще говоря, непрерывно дифференцируемый потенциал (39) теперь становится бесконечным не в отдельных точках, а на уходящих в бесконечность многообразиях $\mathbf{r}_1 = 0$, $\mathbf{r}_2 = 0$ и $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$.

Покажем, что при условиях (36) и (37) существует некоторое число $\mu \leq 0$ такое, что все значения $\lambda \geq \mu$ принадлежат непрерывной части спектра оператора $\mathcal{H}$ в $\mathcal{L}_2(\mathbb{E}_6)$. При этом нет надобности предполагать, что функция $U_{12}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ имеет вид (35).

Для доказательства существования указанного выше числа μ выберем в $\mathbb{E}_6$ произвольно точку $\mathbf{x}_0$ с положительными и различными координатами, проведем из начала координат через эту точку $\mathbf{x}_0$ полупрямую G и обозначим через Ω конус с осью вращения G и настолько малым углом при вершине, чтобы координаты любой точки, лежащей внутри или на границе Ω , были положительны и различны.

Если некоторая точка $\mathbf{x}$ уходит в бесконечность, оставаясь внутри конуса Ω , то стремится к бесконечности каждая координата точки $\mathbf{x}$, так что определенная равенством (39) функция $q(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} q(\mathbf{x}) = 0 \quad (\mathbf{x} \in \Omega).$$

Но тогда, в силу теоремы 8 п° 49, будет $[0, \infty) \subset C(\mathcal{H})$, откуда и следует существование требуемого числа $\mu \leq 0$.

Оператор (34) является частным случаем оператора

$$\mathcal{H}\psi = - \sum_{j,k=1}^n \sum_{\nu=0}^2 a_{jk} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_{3j-\nu} \partial x_{3k-\nu}} + \sum_{\substack{j,k=0 \\ (j < k)}} V_{jk}(r_{jk}) \psi, \quad (41)$$

где $x_{3j-\nu}$ ($\nu = 0, 1, 2$; $j = 1, 2, \dots, n$) — координаты точки $3n$ -мерного евклидова пространства $\mathcal{E}_{3n}$, $r_{jk} = r_j - r_k$,

$$r_j = \{x_{3j-2}, x_{3j-1}, x_{3j}\} \quad (j, k \geq 1), \quad r_{0j} = r_j \\ (j = 1, 2, \dots, n)$$

и $a_{jk} = a_{kj}$ — коэффициенты положительно определенной квадратичной формы. Если не учитывать движение ядра, то $a_{jk} = 0$ при $j \neq k$. Формулой (41) охватывается широкий класс квантовомеханических систем. Так, например, в случае кулоновского взаимодействия для системы из любого числа одноименно заряженных частиц, находящихся в поле нескольких неподвижных частиц с зарядом противоположного знака, в (41) следует положить

$$V_{0j}(r_{0j}) = - \sum_{s=1}^{n_0} b_{sj} \frac{1}{r_{\alpha_s, j}} \quad (j = 1, 2, \dots, n), \quad (42)$$

$$V_{jk}(r_{jk}) = \frac{c_{jk}}{r_{jk}} \quad (j, k = 1, 2, \dots, n; j < k), \quad (43)$$

где n_0 — число неподвижных частиц, $\{\alpha_{3s-\nu}\}$ ($\nu = 0, 1, 2$; $s = 1, 2, \dots, n_0$) — их координаты, $r_{\alpha_s j} = \left\{ \sum_{\nu=0}^2 (x_{3j-\nu} - \alpha_{3s-\nu})^2 \right\}^{1/2}$, а $c_{jk} = c_{kj}$ и b_{sj} — некоторые неотрицательные числа.

Первое математическое исследование характера энергетического спектра системы двух частиц было предпринято Т. Като [48(1)], которому для случая атома гелия, когда в (40) $b_1 = b_2 = me^2 \hbar^{-2}$, а $c_{12} = \frac{1}{2} me^2 \hbar^2$, где m и e — масса и заряд электрона, удалось установить, что левее некоторой точки спектр оператора $\mathcal{H}$ дискретен и содержит непустое множество собственных значений. Характер непрерывной части спектра оставался при этом невыясненным. Следуя методу Т. Като (описанному также в [95(2)]), К. Патнам [79(5)] перенес его результат на случай сильно ионизированных атомов, когда порядковый номер атома

в таблице Д. И. Менделеева больше $\frac{5}{8} n (n - 1)$, где n — число оставшихся электронов.

Наиболее полные результаты о природе спектра оператора $\mathcal{H}$ принадлежат Г. М. Жислину. Развивая в соответствующем направлении методы многомерного сингулярного вариационного исчисления, Г. М. Жислин в ряде статей [42] исследовал при определенных предположениях спектр оператора (41). Его общий признак существования дискретного спектра у оператора (41) (см. [42 (4)]) является, по-видимому, первым доказательством (т. е. выводом из основных уравнений квантовой механики) известного в квантовой химии энергетического принципа: для стабильности квантовой системы из n частиц достаточно, чтобы уход из системы любой частицы был энергетически невыгоден [34].

Результаты Г. М. Жислина применительно к кулоновскому потенциалу (42), (43) сводятся к следующему:

Всегда существует такое число $\mu \leq 0$, что $C(\mathcal{H}) = [\mu, \infty)$. Если

$$\sum_{s=1}^{n_0} b_{sk} > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n c_{kj} \quad (44)$$

($k = 1, 2, \dots, n; n \geq 2$), то $\mu < 0$ и левее точки μ спектр $S(\mathcal{H})$ исчерпывается бесконечной возрастающей последовательностью собственных значений λ_m ($m = 1, 2, \dots$), стремящейся к μ . При этом кратность первого собственного значения равна единице. Условие (44) выполняется для всех известных атомов, положительных ионов и молекул в предположении, что ядра атомов в молекуле неподвижны.

65. О структуре непрерывной части спектра оператора Шредингера. Во всех изученных до конца примерах квантовомеханических задач с конкретными потенциалами структура непрерывной части спектра оператора Шредингера L оказывалась достаточно простой. Обычно непрерывная часть спектра не несла на себе собственных значений. Если же таковые имелись, то они образовывали изолированное множество и всегда в ортогональном дополнении ко всем собственным элементам спектральная функция оказывалась абсолютно непрерывной. Однако из результатов И. М. Гельфанда — Б. М. Левитана по теории обратных задач спектрального анализа [28] непосредственно вытекает, что уже

в одномерном случае непрерывная часть спектра может содержать дискретную и сингулярную компоненты сколь угодно сложной природы.

Вопрос о собственных значениях на непрерывной части спектра является достаточно сложным. Представление о причинах сложности этого вопроса дает известная теорема Вейля — Неймана, согласно которой при помощи вполне непрерывного возмущения с произвольно малой абсолютной нормой можно превратить весь спектр самосопряженного оператора A в чисто точечный (см. [89]). Это означает, что если даже до возмущения оператор A не имел собственных значений, возмущенный оператор $\tilde{A}$ может иметь полную в гильбертовом пространстве H систему собственных элементов.

Для улавливания собственных значений на $C(L)$ по поведению потенциала в бесконечности, по-видимому, не существует качественных методов. Несколько проще устанавливать отсутствие собственных значений на $C(L)$. В этом случае достаточно установить отсутствие при $\lambda \in C(L)$ нетривиальных решений уравнений $Lu - \lambda u = 0$ в $\mathcal{L}_2$. Таков путь доказательства всех известных теорем об отсутствии собственных значений на $C(L)$.

В частности, Т. Като [48 (3)] установил, что при $\lambda > 0$ решения $u(x)$ уравнения $-\Delta u + qu = \lambda u$ не могут убывать слишком быстро, если

$$q(x) = o(|x|^{-1}). \quad (45)$$

Точнее, при любых $\epsilon > 0$, $b > 0$ будет

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R^\epsilon \int_{R \leq |x| \leq R+b} |u(x)|^2 dx = \infty.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что соответствующий оператор L в $\mathcal{L}_2(\mathbb{R}^n)$, непрерывная часть спектра которого совпадает с полуосью $\lambda \geq 0$, не может иметь положительных собственных значений при условии (45). Это же верно для внешности любой ограниченной области и для комплекснозначных потенциалов. Исследования Т. Като основаны на сложных интегро-дифференциальных неравенствах, но более простое доказательство отсутствия точек из $D(L)$ на $C(L)$ не известно.

Упомянутая выше абстрактная теорема Вейля — Неймана характеризует дискретную часть спектра как неустойчивую его компоненту: при переходе от A к B с помощью вполне

непрерывного возмущения K произвольно малой абсолютной нормы на компоненте $C(A) = C(B)$ спектра оператора A может появиться всюду плотное множество собственных значений или, наоборот, всюду плотное на $C(A)$ множество собственных значений может целиком исчезнуть. Дискретная часть спектра, лежащая на $C(A)$, остается неустойчивой и при более слабых возмущениях и даже при одномерных возмущениях. Крайнюю неустойчивость этой и сингулярной компоненты спектра одномерного оператора Шредингера обнаружил недавно Н. Ароншайн. В его статье [4] показано, что при данном потенциале эти компоненты могут перейти одна в другую в результате изменения одного лишь граничного условия в нуле.

В противоположность этому, абсолютно непрерывная часть спектра, которая не устойчива и может даже полностью исчезнуть в условиях теоремы Вейля — Неймана, оказывается инвариантной при более слабых возмущениях. Соответствующий результат был получен в 1957 г. М. Розенблумом [85] и Т. Като [48 (2)].

Теоремой Розенблума — Като устанавливается, что при возмущении самосопряженного оператора A вполне непрерывным оператором с конечным абсолютным следом, абсолютно непрерывная часть оператора A сохраняется с точностью до унитарной эквивалентности. Эта теорема является существенным обобщением теоремы Г. Вейля о сохранении непрерывной части спектра при вполне непрерывных возмущениях. Теорема Розенблума — Като тесно связана с вопросом существования операторов рассеяния, введенных в квантовую механику В. Гейзенбергом.

При использовании теоремы Розенблума — Като в теории сингулярных дифференциальных операторов приходится переходить от самих операторов к их резольвентам или степеням резольвент.

Аналогичная картина имела место при первых применениях в теории сингулярных дифференциальных операторов самой теоремы Г. Вейля. Так, например, А. Я. Повзнер в [81] для доказательства инвариантности непрерывной части спектра оператора Шредингера (1) вне замкнутой поверхности при деформации этой поверхности исследовал разность резольвентных ядер соответствующих краевых задач.

Рассмотрим задачу о возмущении границы и краевых условий на ней, рассмотренной на основе теоремы Розенблума — Като М. Ш. Бирманом [13 (10)] для оператора Шредингера (1).

Пусть Ω есть внешность ограниченной области ω в $\mathbb{E}_m$, Γ — общая граница ω и Ω и

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma_\Gamma(\mathbf{x}) u \Big|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = 0 \quad (\sigma_\Gamma(\mathbf{x}) \geq 0). \quad (46)$$

Предположим еще, что в (1) $q(\mathbf{x}) \geq 0$. Как было установлено в п° 17, множество $C(L)$ не меняется при изменении краевых условий (46). Следуя М. Ш. Бирману [13 (11)], рассмотрим аналогичный вопрос относительно абсолютно непрерывной части спектра $S(L_C) \subset C(L)$. Для простоты будем считать, что на меняющейся границе Γ все время задано первое краевое условие $u|_{\mathbf{x} \in \Gamma} = 0$, и обозначим через $\tilde{L}_\omega$ и $\tilde{L}_\Gamma$ самосопряженные операторы, определяемые этим краевым условием и операцией (1) в $\mathcal{L}_2(\omega)$ и $\mathcal{L}_2(\Omega)$ соответственно. Очевидно, самосопряженный в $\mathcal{L}_2(\mathbb{E}_m)$ оператор $M = \tilde{L}_\omega \oplus \tilde{L}_\Gamma$ является положительно определенным и сингулярные свойства спектра оператора M порождаются оператором $\tilde{L}_\Gamma$. Поэтому достаточно сравнить оператор M с оператором L , порождаемым операцией (1) сразу во всем пространстве $\mathcal{L}_2(\mathbb{E}_m)$.

Пусть L_0 есть результат расщепления L на поверхности γ . Тогда оба оператора L и M суть положительно определенные самосопряженные расширения оператора L_0 , причем M есть расширение L_0 по Фридрихсу.

Далее, используя результаты М. Г. Крейна [53 (2)] и М. И. Вишика [24 (3)] по теории расширения полуограниченных операторов, можно показать, что собственные значения положительного оператора $K = L^{-1} - M^{-1}$ не превосходят последовательных максимумов интеграла

$$\int_{\mathbb{E}_m} |u(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

при условии

$$\int_{\mathbb{E}_m} (|\nabla u|^2 + q|u|^2) d\mathbf{x} = 1$$

и соответствующих линейных связях, где функция $u(\mathbf{x})$ удовлетворяет уравнению $-\Delta u + qu = 0$ внутри и вне области ω . Устанавливается, что эти максимумы λ_r действительно достигаются и для них справедлива оценка

$$\lambda_r \leq Cr^{\frac{2}{1-m}}.$$

При $m = 2$ отсюда сразу следует, что оператор K имеет конечный абсолютный след, и поэтому абсолютно непрерывные части операторов L^{-1} и M^{-1} унитарно эквивалентны.

При $m > 2$ аналогичный результат достигается рассмотрением оператора $L^{-p} - M^{-p}$ при достаточно большом натуральном p .

Нетрудно учесть также влияние изменения самого краевого условия вида (46). Тем же путем может быть рассмотрена операция (1), вырождающаяся на части границы, и другие подобные задачи.

Следует, однако, заметить, что в задаче рассеяния для операции (1) и в других близких задачах применение теоремы Розенблюма — Като не дало пока ничего нового по сравнению с результатами, полученными ранее методом А. Я. Повзнера.

Результат А. Я. Повзнера [81], относящийся еще к 1953 г. и несколько уточненный Д. М. Эйдуsom [110] и Т. Икэбе [45], состоит в том, что при $m = 3$ и $q(x) = O(|x|^{-(2+\delta)})$ ($\delta > 0$) абсолютно непрерывная часть спектра совпадает с полусью $\lambda \geq 0$, а непрерывный сингулярный спектр отсутствует. Близкие вопросы изучались другим методом О. А. Ладыженской и Л. Д. Фаддеевым [58], продолжившими соответствующие исследования К. Фридрихса [97 (2)]. Метод этих авторов не чувствителен к размерности пространства.

Заканчивая краткий обзор работ по исследованию структуры непрерывного спектра, следует отметить, что в этой области еще не разработаны достаточно сильные общие методы качественного анализа. Здесь имеется ряд конкретных нерешенных задач. В частности, остается открытым вопрос о существовании сингулярной части спектра и о наличии собственных значений на непрерывной части спектра у оператора энергии атома гелия (40).

66. Комплексные потенциалы. Такие потенциалы возникли впервые в квантовомеханических задачах с диссипацией энергии [8]. Вообще, появление несамосопряженных операторов характерно для описания незамкнутых физических систем. Основоположные исследования по спектральной теории несамосопряженных операторов в абстрактном гильбертовом пространстве принадлежат М. В. Келдышу [51 (2)] и М. С. Лившицу [62]. Первые результаты по спектральному анализу одномерного оператора Шредингера с комплексным

потенциалом были получены М. А. Наймарком [72(4)] и Б. Я. Левиным [60].

Настоящий пункт посвящен обзору некоторых результатов изучения дискретной части спектра операторов (1) и (5) с комплексным потенциалом. Здесь в методах и результатах наблюдается существенное отличие от самосопряженного случая, изучавшегося в п°п° 30 и 48.

Обозначим через L минимальный оператор, определяемый операцией (1) в $\mathcal{L}_2(0, \infty)$. Считая дефектное число J -симметрического оператора L равным единице, обозначим через L_h самосопряженное расширение оператора L , определяемое краевым условием

$$y(0) - hy'(0) = 0 \quad (47)$$

с комплексным параметром h .

Требования, налагаемые в этом пункте на потенциал $q(x)$, влекут совпадение $C(L)$ с полуосью $\lambda \geq 0$, откуда следует, что $\text{Def } L = 1$, ибо при $\text{Def } L = 2$ было бы $C(L) = \emptyset$.

В самосопряженном случае при условии

$$\int_0^{\infty} x |q(x)| dx < \infty \quad (48)$$

спектр оператора L_h состоит из положительной λ -полуоси и конечного числа отрицательных собственных значений (см. теоремы 23 п° 31 и 10 п° 30).

В общем случае, когда потенциал $q(x)$ и параметр h в краевом условии (47) комплексны, также будет $C(L_h) = [0, \infty)$, но относительно части спектра оператора L_h , находящейся вне полуоси $\lambda \geq 0$, можно лишь утверждать, что она состоит из ограниченного множества собственных значений конечного ранга, все предельные точки которого лежат на полуоси $\lambda \geq 0$ (см. [72(4)] и [60]).

В качестве признака конечности этого множества М. А. Наймарк [72(4)] получил вместо (48) значительно более жесткое условие

$$\int_0^{\infty} e^{\epsilon x} |q(x)| dx < \infty, \quad (49)$$

где ϵ — какое-нибудь положительное число. При этом условии непрерывная часть спектра $C(L_h) = [0, \infty)$ не несет на себе собственных значений.

Условие (49) обеспечивает аналитичность при $\operatorname{Im} z > -\varepsilon$ функции

$$\varphi(0, z) - h\varphi'_x(0, z), \quad (50)$$

где $\varphi(x, z)$ есть решение уравнения

$$-y'' + q(x)y = z^2y,$$

принадлежащее $\mathcal{L}_2(0, \infty)$ и удовлетворяющее условию $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-izx}\varphi(x, z) = 1$. Уже при условии (48) такое решение

для невещественных z существует и единственно [60], а функция (50) аналитична в верхней и нижней z -полуплоскости и продолжаема по непрерывности на вещественную ось. Так как невещественные корни функции (50) образуют всю дискретную часть спектра J -самосопряженного оператора L_h , лежащую вне полуоси $\lambda \geq 0$, то из аналитичности этой функции и следует указанный выше результат М. А. Наймарка.

Однако Б. Я. Левин обратил внимание на то, что для конечности дискретной части спектра оператора L_h , расположенной вне полуоси $\lambda \geq 0$, достаточно потребовать, чтобы функция (50) принадлежала к некоторому квазианалитическому классу функций на вещественной оси. В соответствии с этим Б. Я. Левину [60] удалось несколько ослабить требование (49), заменив его условием

$$|q(x)| < e^{-\gamma(x)},$$

где функция $x\gamma'(x)$ стремится монотонно к бесконечности и при $a > 0$

$$\int_a^\infty \frac{\gamma(x)}{x^2} dx = \infty.$$

В другой форме условия квазианалитичности функции (50) были позднее получены Б. С. Павловым [78], который показал, что требование (49) не может быть существенно ослаблено. Он установил, что не только одно условие (48), но даже бесконечная последовательность условий

$$\int_0^\infty x^n |q(x)| dx < \infty \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (51)$$

еще не влечет конечности множества неположительных точек спектра оператора L_h . При условиях (51) функция (50) будет

бесконечнократно дифференцируемой на вещественной оси, но может не принадлежать квазианалитическому классу. Доказательство Б. С. Павлова состоит в построении соответствующего примера. При этом, пользуясь результатами, полученными в обратных задачах спектрального анализа и теории рассеяния (см. [28], [67]), удастся найти такой пример в классе операторов с вещественным потенциалом $q(x)$ и комплексным параметром h . Более того, Б. С. Павлов установил существование в этом классе таких операторов, невещественный спектр которых сгущается к некоторому совершенному множеству точек полуоси $\lambda \geq 0$ линейной меры нуль. При условии (48) получить множество точек сгущения невещественных собственных значений положительной меры невозможно, но в классе минимальных симметрических операторов L со спектром $S(L) = [0, \infty)$ существуют операторы, допускающие несамосопряженное расширение L_h , невещественный дискретный спектр которого сгущается к некоторому отрезку оси $\lambda \geq 0$.

Ряд результатов относительно спектра оператора Шредингера (5) с комплексным потенциалом в $\mathcal{L}_2(\mathcal{E}_m)$ получил Р. М. Мартиросян [66]. В частности, при $m=3$ им установлено, что в случае ограниченности функции $q(x)e^{\varepsilon|x|}$ при каком-нибудь $\varepsilon > 0$ множество точек спектра оператора L , лежащих вне $C(L) = [0, \infty)$, конечно. Оно будет пустым, если $\sup_{x \in \mathcal{E}} |q(x)| e^{\varepsilon|x|} < \frac{\varepsilon^2}{4}$, и в этом случае непрерывная часть спектра $C(L)$ не будет нести на себе собственных значений [66 (2)].

67. Модель кристаллической решетки. Простейшая модель Борна — Кармана такой решетки представляет собой одномерную бесконечную цепочку атомов. Одномерность цепочки означает, что колебания атомов поляризованы. Межатомные силы настолько быстро убывают с расстоянием, что достаточно учитывать лишь взаимодействие ближайших соседей. Помимо сил взаимодействия между атомами, каждый из них связан со своим положением равновесия упругой силой. По существу, уравнения движения в описанной модели не отличаются от таковых для бусинок на упругой нити и имеют вид

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = \alpha_{k-1} y_{k-1} + \beta_k y_k + \alpha_k y_{k+1} \quad (k = \pm 0, 1, 2, \dots).$$

Если период решетки равен n ($1 \leq n < \infty$), то $\alpha_{k+n} = \alpha_k$, $\beta_{k+n} = \beta_k$ и нахождение собственных частот сводится к спектральному анализу периодической якобиевой матрицы T с элементами

$$t_{kk} = \beta_k, \quad t_{k, k+1} = t_{k+1, k} = \alpha_k \quad (k = \pm 0, 1, 2, \dots).$$

Периодические, а также предельно-периодические якобиевы матрицы и ассоциированные с ними непрерывные дроби на протяжении длительного времени являлись предметом изучения различных авторов (см. [30 (1)] и приведенную там библиографию).

В настоящем пункте излагается один алгебраический подход к таким матрицам. В сочетании с теоретико-операторными методами он приводит к некоторым новым результатам относительно характера дискретной части спектра, вносимой в лакуны $S(T)$ вполне непрерывными возмущениями матрицы T . Приводимые ниже результаты принадлежат П. Б. Найман [71 (2)].

Бесконечную матрицу A с комплексными элементами a_{jk} назовем *обобщенной якобиевой матрицей* порядка $2m$, если $a_{jk} = 0$ при $|j - k| > m$, но $a_{jk} \neq 0$ при $|j - k| = m$ ($j, k = \pm 0, 1, 2, \dots$). Таким образом, обычные матрицы Якоби являются обобщенными якобиевыми матрицами второго порядка.

Отправным пунктом исследования является следующий дискретный аналог теоремы Барчнелла и Ченди о линейных дифференциальных выражениях (см. [3]).

Теорема 3 [71 (2)]. *Если обобщенные якобиевы матрицы A и B порядков $2m$ и $2n$ соответственно перестановочны, то они удовлетворяют алгебраическому соотношению*

$$D(A, B) = 0$$

степени $2n$ относительно A и степени $2m$ относительно B .

Введем специальную обобщенную матрицу $2n$ -го порядка E_n , все элементы которой равны нулю, за исключением элементов $e_{k, k-n} = e_{k, k+n} = 1$.

Если обобщенная якобиева матрица A имеет период n , то она, очевидно, перестановочна с E_n , так что

$$D(A, E_n) = 0. \quad (52)$$

В простейшем случае обычной n -периодической симметрической матрицы Якоби с вещественными элементами многочлен $D(\lambda, \mu)$ в (52) есть полный квадрат, так что такая матрица удовлетворяет уравнению

$$P(T) = E_n, \quad (53)$$

где $P(\lambda)$ есть многочлен степени n . Так как при этом спектр $S(E_n)$ есть отрезок $-2 \leq \mu \leq 2$ и каждая точка $\mu \in S(E_n)$ имеет кратность $2n$, а кратность спектра $S(A)$ не превосходит двух, то из соотношения (53) вытекает

Теорема 4 [71(2)]. Спектр вещественной симметрической периодической якобиевой матрицы T совпадает с полным λ -прообразом отрезка $-2 \leq \mu \leq 2$, определяемым алгебраическим уравнением

$$P(\lambda) = \mu, \quad (54)$$

все корни которого при $-2 \leq \mu \leq 2$ вещественны. При этом каждая точка $S(T)$ имеет вторую кратность.

Из теоремы 2 следует, что спектр $S(T)$ представляет собой систему n отрезков, которые в частных случаях могут иметь общие корни. Эти отрезки совпадают с зонами устойчивости соответствующего уравнения в конечных разностях, определяемыми аналогично зонам (62) п° 56.

Аналогичным путем устанавливается, что в общем случае несимметрической периодической матрицы T с комплексными элементами спектр $S(T)$ есть полный λ -прообраз некоторого эллипса плоскости μ при отображении (54). В этом случае $S(T)$ есть система n алгебраических дуг в комплексной λ -плоскости (криволинейных зон устойчивости), содержащая не более n связных компонент.

Занумеруем слева направо лакуны в спектре $S(T)$ вещественной самосопряженной n -периодической якобиевой матрицы T индексами $0, 1, 2, \dots, n$ при n четном и индексами $1, 2, \dots, n+1$ при n нечетном, начиная с лакуны, идущей из $-\infty$, и кончая лакуной, уходящей в $+\infty$. Возьмем, далее, матрицу T прибавлением диагональной вещественной матрицы K с элементами $k_r \rightarrow 0$ при $|r| \rightarrow \infty$. Так как возмущение K вполне непрерывно, то спектр $S(T+K)$ будет состоять из системы отрезков, составлявших спектр $S(T)$, и ограниченного множества собственных значений, которые могут сгущаться лишь к концам лакун в $S(T)$. Соответствующее возмущение

$$Q = P(T+K) - P(T)$$

матрицы $P(T)$ будет обобщенной якобиевой вполне непрерывной матрицей порядка $2n - 2$. Таким образом, многочлен $P(\lambda)$ преобразует предельно-периодическую матрицу $T + K$ в предельно-постоянную матрицу

$$P(T + K) = E_n + Q. \quad (55)$$

Теперь, пользуясь методами п° 37, нетрудно найти достаточные условия конечности и бесконечности множества точек спектра $S(E_n + Q)$, расположенных левее точки $\mu = -2$ или правее точки $\mu = 2$. В силу соотношения (55) эти условия совпадают с условиями конечности и бесконечности множества точек спектра $S(T + K)$ в объединении всех нечетных или всех четных лакун спектра $S(T)$.

Для краткости формулировки получаемых на этом пути результатов ограничимся матрицами T с периодом $n = 2$ и положим

$$a_r = \frac{1 - (-1)^r}{2} \alpha_1 + \frac{1 + (-1)^r}{2} \alpha_2,$$

приняв для определенности, что $\alpha_1 \alpha_2 > 0$ и $\beta_2 - \beta_1 > 0$. Далее, введем величины

$$\begin{aligned} \omega'_r &= \frac{|k_r + k_{r-1}|}{|a_r|} + \frac{|k_r + k_{r+1}|}{|a_{r+1}|} - q_r, \\ \omega''_r &= \frac{|k_r + k_{r-1}|}{|a_r|} + \frac{|k_r + k_{r+1}|}{|a_{r+1}|} + q_r, \end{aligned}$$

где

$$q_r = \frac{(-1)^r (\beta_2 - \beta_1) k_r + k_r^2}{\alpha_1 \alpha_2}.$$

Вторую лауну в $S(T)$ назовем внутренней, а объединение первой и третьей — внешней лакуной $S(T)$. Часть спектра возмущенного оператора $T + K$, лежащего во внутренней лакуне, обозначим через S'' , а часть спектра этого оператора, находящегося во внешней лакуне, — через S' . Имеет место

Теорема 5 [71 (2)]. *Если*

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \sup r^2 \omega'_r < 1, \quad (56)$$

то S'' конечно. Если

$$\lim_{|r| \rightarrow \infty} \sup r^2 \omega''_r < 1, \quad (57)$$

то S' конечно. Если один из четырех рядов

$$\sum_{r=0}^{\pm \infty} q_{2r}, \quad \sum_{r=0}^{\pm \infty} q_{2r+1} \quad (58)$$

расходится к $-\infty$, то S'' бесконечно. Если один из этих рядов (58) расходится к ∞ , то S' бесконечно.

Из теоремы 5, в частности, вытекает, что если при $|r| \rightarrow \infty$ будет $k_r = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$, то возмущение K может внести во все лакуны спектра $S(T)$ лишь конечное число собственных значений. С другой стороны, если один из двух рядов

$\sum_{r=0}^{\pm \infty} k_{2r-1}$ состоит лишь из положительных слагаемых и расходится, то возмущение K вносит во внутреннюю лакуну бесконечное множество собственных значений. Если же один

из рядов $\sum_{r=0}^{\pm \infty} k_{2r}$ состоит лишь из положительных слагаемых и расходится, то возмущение K вносит бесконечное множество значений во внешнюю лакуну.

Используя теорему 7^{bis} п° 3 об односторонних возмущениях, можно в случаях, когда почти все k_r имеют один и тот же знак, обнаруживать, к какому из концов лакуны сгущаются собственные значения, если они образуют бесконечное множество.

В общем случае любого периода n получаются аналогичные результаты. При этом в левых частях неравенств (56) и (57) следует положить $\omega'_r = \sigma_r - q_r$, $\omega''_r = \sigma_r + q_r$, где σ_r есть сумма абсолютных величин всех элементов r -й строки матрицы Q , кроме ее диагонального элемента q_r , а в правых частях этих неравенств заменить единицу величиной $n^2/4$.

Таким образом, условие $k_r = o\left(\frac{1}{r^2}\right)$ остается достаточным для конечности множества точек спектра оператора $T + K$ в объединении всех лакун. Для бесконечности множества точек $S(T + K)$, лежащих в объединении всех нечетных или четных лакун, достаточно потребовать расходимости одного

из $2n$ рядов $\sum_{r=0}^{\pm \infty} q_{j+nr}$ ($j = 1, 2, \dots, n$) к $\pm \infty$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. А д а м о в Н. В.
О колебаниях интегралов уравнения второго порядка с периодическими коэффициентами и о некоторых условиях устойчивости, Матем. сборн. **42** (1935), 651—667.
2. А д е л ь с о н - В е л ь с к и й Г. М.
Обобщение одной геометрической теоремы С. Н. Бернштейна, ДАН СССР **49** (1945), 399—401.
3. А й н с (E. L. Ince)
Обыкновенные дифференциальные уравнения, ДНТБУ, 1939.
4. А р о н ш а й н Н. (N. Aronszajn)
On a problem of Weyl in the theory of singular Sturm — Liouville equations, Amer. J. Math. **79**, № 3 (1957), 597—610.
5. А т к и н с о н (F. V. Atkinson)
Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сборн. **28** (70) : 1 (1951), 3—14.
6. А х и е з е р Н. И.
 - 1) О построении потока, обтекающего тонкий профиль, Зб. праць Ін-ту математики АН УРСР **4** (1940), 151—155.
 - 2) Бесконечные матрицы Якоби и проблема моментов, Успехи матем. наук., вып. IX (1941).
 - 3) Об ортогональных многочленах на нескольких интервалах, ДАН СССР **134** (1960), 9—12.
 - 4) Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею, Физматгиз, 1961.
 - 5) Континуальные аналоги ортогональных многочленов на системе интервалов, ДАН СССР **141** (1961), 263—266.
7. А х и е з е р Н. И. и Г л а з м а н И. М.
Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Гостехиздат, 1950.
8. А х и е з е р А. И. и П о м е р а н ч у к И.
Некоторые вопросы теории ядра, Гостехиздат, 1948.
9. Б а н а х (S. Banach)
Курс функціонального аналізу, Изд. Радянська школа, 1948.
10. Б е л л м а н (R. Bellman)
Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений, ИЛ, 1954.
11. Б е р е з а н с к и й Ю. М.
О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, Украинский матем. журн. **XI**, № 4 (1959), 352—364.

12. Бернштейн С. Н.
Об одной геометрической теореме и ее приложениях к уравнениям в частных производных эллиптического типа, Успехи матем. наук 8 (1940), 75—81.
13. Бирман М. Ш.
 - 1) К теории общих граничных задач для эллиптических уравнений, ДАН СССР 92 (1953), 205—208.
 - 2) О спектре сингулярных граничных задач для эллиптических дифференциальных уравнений, ДАН СССР 97 (1954), 5—7.
 - 3) К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов, Матем. сборн. 38 (80) : 4 (1956), 431—450.
 - 4) Характеристика эллиптических дифференциальных операторов с максимальной областью определения, Вестник ЛГУ, № 19, сер. матем., мех. и астр., вып. 4 (1957), 177—183.
 - 5) Возмущение квадратичных форм и спектр сингулярных граничных задач, ДАН СССР 125 (1959), 471—474.
 - 6) О спектре операторов Шредингера и Дирака, ДАН СССР 129 (1959), 239—242.
 - 7) О дискретной части спектра операторов Шредингера и Дирака, Вестник ЛГУ, № 7, сер. матем., мех. и астр., вып. 2 (1960), 167—168.
 - 8) О спектре сингулярных граничных задач, Матем. сборн. 55 (97) : 2 (1961), 125—173.
 - 9) О числе собственных значений в задаче квантового рассеяния, Вестник ЛГУ, № 13, сер. матем., мех. и астр., вып. 3 (1961), 163—165.
 - 10) О возмущении спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий, ДАН СССР 137 (1961), 761—763.
 - 11) Возмущения непрерывного спектра сингулярного эллиптического оператора при изменении границы и граничных условий, Вестник ЛГУ, № 1, сер. матем., мех. и астр., вып. 2 (1962), 22—55.
14. Бирман М. Ш. и Павлов Б. С.
О полной непрерывности некоторых операторов вложения, Вестник ЛГУ, № 1, сер. матем., мех. и астр., вып. 1 (1961), 61—74.
15. Бринк (Inge Brink)
Self-adjointness and spectra of Sturm — Liouville operators, Math. Scand. 7, № 1 (1959), 219—239.
16. Броудер (F. E. Browder)
1) On the spectral theory of elliptic differential operators, Math. Ann. 142, № 1 (1961), 22—130.
17. Броунелл (F. H. Brownell)
Spectrum of the static potential Schrödinger equation over E_n , Ann. Math. 54, № 3 (1951), 554—594.
18. Броунелл и Кларк (F. H. Brownell, C. W. Clark)
Asymptotic distribution of the lower part of the Schrödinger operator spectrum, J. Math. and Mech. 10, № 1 (1961), 31—70.
19. Валлах (S. Wallach)
1) On the location of spectra of differential equations, Amer. J. Math. 70 (1948), 833—841.

- 2) The spectra of periodic potentials, Amer. J. Math. **70** (1948), 842—848.
20. Вейль (H. Weyl)
 - 1) Über beschränkte quadratische Formen, deren differenz vollständig ist, Rend. Circolo mat. Palermo **27** (1909), 373—392.
 - 2) Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlichen Funktionen, Math. Ann. **68** (1910), 220—269.
 - 3) Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, Math. Ann. **71** (1912), 441—479.
 - 4) The Method of orthogonal projection in potential theory, Duke Math. J. **7** (1940), 411—444.
21. Вет и Мандл (J. S. de Wet, F. Mandl)

On the asymptotic distribution of eigen-values, Proceedings Roy. Soc. A **200**, 1950, 572—580.
22. Вингольц (E. Wienholtz)

Halbbeschränkte partielle Differentialoperatoren zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Math. Ann. **135** (1958), 50—80.
23. Винтнер (A. Wintner)
 - 1) On the momentum operator in wave mechanics, Phys. Rev. **71**, № 8 (1947), 547—549.
 - 2) On the location of continuous spectra, Amer. J. Math. **70** (1948), 22—31.
 - 3) On Dirac's theory of continuous spectra, Phys. Rev. **73** (1948), 781—785.
 - 4) On the smallness of isolated eigenfunctions, Amer. J. Math. **71** (1949), 603—611.
 - 5) A condition of oscillatory stability, Quart. Appl. Math. **7** (1949), 115—117.
24. Вишик М. И.
 - 1) Линейные расширения операторов и краевые условия, ДАН СССР **65** (1949), 433—436.
 - 2) О линейных краевых задачах для дифференциальных уравнений, ДАН СССР **65** (1949), 785—788.
 - 3) Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений, Тр. Моск. матем. о-ва **1** (1952), 187—246.
25. Вольф (F. Wolf)
 - 1) On the essential spectrum of partial differential boundary problems, Comm. Pure and Appl. Math. **12** (1959), 211—228.
 - 2) On the invariance of the essential spectrum under a change of boundary conditions of partial differential operators, Proc. Koninkl. Nederl. Akad. Wet. A **62**, 2 (1959), 142—147.
26. Галиндо (A. Galindo)

On the Existence of I -Self-adjoint Extensions of I -Symmetric Operators with Adjoint, Comm. Pure and Appl. Math. **15** (1962), 423—425.
27. Гельфанд И. М.
 - 1) Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами, ДАН СССР **73** (1950), 1117—1120.
 - 2) О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов, Успехи матем. наук **7**, вып. 6 (52) (1952), 183—184.

28. Гельфанд И. М. и Левитан Б. М.
Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, сер. матем. 15 (1951), 309—360.
29. Гельфанд И. М. и Шиллов Г. Е.
Обобщенные функции и действия над ними, Физматгиз, 1958.
30. Геронимус Я. Л.
1) О характере решения проблемы моментов в случае предельно-периодической ассоциированной дроби, Изв. АН СССР, сер. матем. V (1943), 203—210.
2) Многочлены ортогональные на окружности и на отрезке, Физматгиз, 1958.
3) О предположении В. А. Стеклова, ДАН СССР 142 (1962), 507—509.
31. Глазман И. М.
1) К теории сингулярных дифференциальных операторов, Успехи матем. наук 5, вып. 6 (1950), 102—135.
2) О спектре линейных дифференциальных операторов, ДАН СССР 80 (1951), 153—156.
3) О характере спектра одномерных сингулярных краевых задач, ДАН СССР 87 (1952), 5—8.
4) О характере спектра многомерных сингулярных краевых задач, ДАН СССР 87 (1952), 171—174.
5) О применении метода расщепления к многомерным сингулярным краевым задачам, Матем. сборн. 35 (77) : 2 (1954), 231—246.
6) О характере спектра линейных дифференциальных уравнений, Тр. Харьк. политехнического ин-та, сер. инж. физ. 5, вып. 1 (1955), 67—82.
7) О характере спектра сингулярных краевых задач для систем дифференциальных уравнений, Ученые записки Харьк. гос. пед. ин-та 18, сер. матем., вып. 1 (1956), 29—32.
8) Об одном аналоге теории расширений эрмитовых операторов и несимметрической одномерной краевой задаче на полуоси, ДАН СССР 115 (1957), 214—216.
9) Осцилляционные теоремы для дифференциальных уравнений высших порядков и спектры соответствующих дифференциальных операторов, ДАН СССР 118 (1958), 423—426.
10) Об отрицательной части спектра одномерных и многомерных дифференциальных операторов над вектор-функциями, ДАН СССР 119 (1958), 421—424.
11) Исследование отрицательной части спектра одномерных дифференциальных операторов, Записки Харьк. матем. об-ва 26, сер. 4 (1960), 233—246.
32. Глазман И. М. и Жихарь Н. А.
Обращение сингулярных диссипативных дифференциальных операторов второго порядка, Ученые записки Харьк. гос. пед. ин-та 21, сер. матем., вып. 2 (1957), 9—24.
33. Глазман И. М. и Скачек Б. Я.
О дискретной части спектра оператора Лапласа в предельно-цилиндрических областях, ДАН СССР 147 (1962), 760—763.
34. Гомбаш
Проблема многих частиц в квантовой механике, 1953.

35. Г о х б е р г И. Ц.
Об индексе неограниченного оператора, Матем. сборн. **33** (75) : 1 (1953), 193—198.
36. Г о х б е р г И. Ц. и К р е й н М. Г.
Основные положения о дефектных числах, корневых векторах и индексах линейных операторов, Успехи матем. наук **12**, вып. 2 (74), (1957), 43—118.
37. Д а н и л е в с к и й А. М.
К одной теореме М. Г. Крейна, ДАН СССР **1** (X) (1936), 335—338.
38. Д а н и л е в с к и й А. М. и К р е й н М. Г.
О билинейных разложениях симметрических ядер, положительных в смысле Мерсера, ДАН СССР **1** (X) (1936), 303—306.
39. Д а н ф о р д (N. Dunford)
A survey of the theory of spectral operators, Bull. Amer. Math. Soc. **64** (1958), 217—274. (Сборник переводов «Математика» **4**: 1 (1960), 53—100.)
40. Д ж о н с (D. S. Jones)
The eigenvalues of $\Delta^2 u + \lambda u = 0$ when the boundary conditions are given on semi-infinite domains, Proc. Cambridge Philos. Soc. **49** (1953), 668—684.
41. Д и р а к (P. A. M. Dirac)
Принципы квантовой механики, Физматгиз, 1960.
42. Ж и с л и н Г. М.
1) О существовании собственных функций для уравнения Шредингера, ДАН СССР (1957), 931—934.
2) О спектре оператора Шредингера, ДАН СССР **122** (1958), 331—334.
3) Характеристика спектра оператора Шредингера для систем типа молекул, ДАН СССР **128** (1959), 231—234.
4) Исследование спектра оператора Шредингера для системы многих частиц, Тр. Моск. матем. об-ва **9** (1960), 81—120.
5) Об узлах собственных функций оператора Шредингера, Успехи матем. наук **XVI**, вып. 1 (97) (1961), 149—152.
43. Ж и х а р ь Н. А.
К теории расширений J -симметрических операторов, Укр. матем. журнал **XI**, № 4 (1959), 352—364.
44. З о м м е р ф е л ь д и Б е т е (A. Sommerfeld, H. Bethe)
Электронная теория металлов, ГИТТЛ, 1938.
45. И к е б е (T. Ikebe)
Eigenfunctions expansions associated with the Schroedinger operators and their applications to scattering theory, Arch. Ration. Mech. and Analysis **5** (1960), 1—34.
46. И с м а г и л о в Р. С.
Об условиях полуограниченности и дискретности спектра для одномерных дифференциальных операторов, ДАН СССР **140** (1961), 33—36.
47. К а р л е м а н (T. Carleman)
Sur la theorie mathematique de l'equation de Schödinger, Ark. Mat. Act. Fys. **24B**, 11 (1934), 1—7.
48. К а т о (T. Kato)
1) On the existence of solutions of the helium wave equation, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 212—218.

- 2) Perturbation of continuous spectra by trace class operators, Proc. Japan Acad. 33 (1957), 260—264.
- 3) On finite-dimensional perturbations of self-adjoint operators, J. Math. Soc. Japan 9, 2 (1957), 239—249.
- 4) Growth properties of solutions of the reduced wave equations with a variable coefficient, Comm. Pure and Appl. Math. 12 (1959), 403—425. (Сборник переводов «Математика» 5:1 (1961), 115—135.)
49. Кац И. С.
О густоте спектра струны, ДАН СССР 126 (1959), 1180—1182.
50. Кац И. С. и Крейн М. Г.
Критерий дискретности спектра сингулярной струны, Изв. высш. уч. зав. МВО СССР, математика, № 2 (3) (1958), 136—153.
51. Келдыш М. В.
1) О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле, Успехи матем. наук VIII (1940), 171—231.
2) О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР 77 (1951), 11—14.
52. Костюченко А. Г.
О поведении собственных функций самосопряженных операторов, ДАН СССР 114 (1957), 249—251.
53. Крейн М. Г.
1) О дифференциальных самосопряженных операторах и их симметрических функциях Грина, Матем. сборн. 2 (44) : 6 (1937), 1023—1072.
2) Теория самосопряженных расширений полуограниченных симметрических операторов и ее приложения, I Матем. сборн. 20 (62) : 3 (1947), 431—495.
3) То же, II Матем. сборн. 21 (63) : 3 (1947), 365—404.
4) О некоторых задачах на максимум и минимум для характеристических чисел и о ляпуновских зонах устойчивости, Прикладная математика и механика 15 (1951), 323—348.
54. Курант и Гильберт (R. Courant, D. Hilbert)
Методы математической физики, т. I и II, Гостехиздат, 1951.
55. Курода (S. T. Kuroda)
1) On the existence and the unitary properties of the scattering operator, Nuovo cimento XII, № 5 (1959), 431—454.
2) Perturbation of continuous spectra by unbounded operators, J. Math. Soc. Japan I, 11, 3 (1959), II, 12, 3 (1960).
56. Кэлкин (J. W. Calkin)
Symmetric transformations in Hilbert Space, Duke Math. J. 7 (1940), 504—508.
57. Ладыженская О. А.
О замыкании эллиптического оператора, ДАН СССР 79 (1959), 723—725.
58. Ладыженская О. А. и Фаддеев Л. Д.
К теории возмущения непрерывного спектра, ДАН СССР 120 (1958), 1187—1190.
59. Ландис Е. М.
О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений, ДАН СССР 107 (1956), 640—643.

60. Левин Б. Я.
Преобразования типа Фурье — Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР 106 (1958), 187—190.
61. Левитан Б. М.
1) Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, 1950.
2) Об асимптотическом поведении функции Грина и разложении по собственным функциям уравнения Шредингера, Матем. сборн. 41 (83) : 4 (1957), 439—458.
62. Лившиц М. С.
О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, Матем. сборн. 34 (76) : 1 (1954), 145—199.
63. Лидский В. Б.
1) Теорема о спектре возмущенного дифференциального оператора, ДАН СССР 112 (1957), 994—997.
2) Условия полной непрерывности резольвенты несамосопряженного дифференциального оператора, ДАН СССР 113 (1957), 28—31.
3) Несамосопряженный оператор типа Штурма — Лиувилля с дискретным спектром, Тр. Моск. матем. об-ва 9 (1960), 45—80.
64. Любич Ю. И.
1) О фундаментальных решениях линейных дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, Матем. сборн. 39 (81) : 1 (1957), 23—36.
2) О неравенствах между степенями линейного оператора, Изв. АН СССР, сер. матем. 24 (1960), 825—864.
65. Мальцев А. И.
Основы линейной алгебры, Гостехиздат, 1956.
66. Мартиросян Р. М.
1) О спектре несамосопряженного дифференциального оператора — $\Delta u + cu$ в трехмерном пространстве, Изв. Арм. ССР, сер. матем. наук X, № 1 (1957), 85—111.
2) О спектре некоторых возмущений оператора Лапласа в многомерном и трехмерном пространствах, Изв. АН СССР, сер. матем. 24 (1960), 897—920.
67. Марченко В. А.
1) Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, Тр. Моск. матем. об-ва 1 (1952), 328—420.
2) Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, Матем. сборн. 52 (94) : 2 (1960), 739—788.
68. Маслов В. П.
Об асимптотике обобщенных собственных функций уравнения Шредингера. Успехи матем. наук XVI, вып. 4 (1961), 253—254.
69. Михлин С. Г.
1) Проблема минимума квадратичного функционала, Гостехиздат, 1952.
2) Вырождающиеся эллиптические уравнения, Вестник ЛГУ, № 8 (1954), 19—48.

70. Молчанов А. М.
Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка, Тр. Моск. матем. об-ва 2 (1953), 169—200.
71. Найман П. Б.
1) О множестве изолированных точек роста спектральной функции предельно-постоянной якобиевой матрицы, Изв. высш. уч. зав. МВО СССР, математика, № 1 (8) (1959), 129—135.
2) К теории периодических и предельно-периодических якобиевых матриц, ДАН СССР 143 (1962), 277—279.
72. Наймарк М. А.
1) О квадрате замкнутого симметрического оператора, ДАН СССР 26 (1940), 863—867.
2) О спектре сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка, ДАН СССР 85 (1952), 41—44.
3) Линейные дифференциальные операторы, ГИТТЛ, 1954.
4) Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на полуоси, Тр. Моск. матем. об-ва 3 (1954), 181—270.
73. Нейман (J. von Neumann)
Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, Math. Ann. 102 (1929), 49—131.
74. Нехари (Zeev Nehari)
Oscillation criteria for second order linear differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 428—445.
75. Нижник Л. П.
О спектре общих дифференциальных операторов, ДАН СССР 124 (1959), 517—519.
76. Николенко Л. Д.
Некоторые критерии неколебательности дифференциального уравнения четвертого порядка, ДАН СССР 114 (1957), 483—485.
77. Никольский С. М.
Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Изв. АН СССР, сер. матем. 7 (1943), 147—166.
78. Павлов Б. С.
О несамосопряженном операторе $-y'' + q(x)y$ на полуоси, ДАН СССР 141 (1961), 807—810.
79. Патнам (C. R. Putnam)
1) On the spectra of certain boundary-value problems, Amer. J. Math. 71 (1949), 109—111.
2) The cluster spectra of bounded potentials, Amer. J. Math. 71 (1949), 612—619.
3) On isolated eigenfunctions associated with bounded potentials, Amer. J. Math. 72 (1950), 135—147.
4) On the unboundedness of the essential spectrum, Amer. J. Math. 74 (1952), 578—586.
5) Note on the many-particle problem, Quart. Appl. Math. 14, 1 (1956), 101—102.
80. Плеснер А. И. и Рохлин В. А.
Спектральная теория линейных операторов. II, Успехи матем. наук 1, вып. 1 (11) (1946), 71—191.

81. Повзнер А. Я.
О разложении произвольных функций по собственным функциям оператора — $\Delta u + cu$, Матем. сборн. 32 (74) : 1 (1953), 109—156.
82. Рапопорт И. М.
1) О сингулярной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН СССР 79 (1951), 21—24.
2) О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изв. АН УССР, 1954.
83. Реллих (F. Rellich)
1) Störungstheorie der Spectralzerlegung, Math. Ann. 118 (1942), 462—484.
2) Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung 53 (1943), 57—65.
3) Der Eindeutigkeitssatz für die Lösungen der quantenmechanischen Vertauschungsrelation, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1946 (1947), 107—115.
4) Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbröhren, Studies and Essays presented to R. Courant, N. Y. (1948), 329—344.
5) Halbbeschränkte Differentialoperatoren höherer Ordnung, Proceedings of the International Congress of Mathematicians. Amsterdam 2—9 Sept. 1954, Bd III, 243—250.
84. Розенфельд (N. Rosenfeld)
The Eigenvalues of a class of singular differential operators, Comm. Pure and Appl. Math. XIII, 3 (1960), 395—405.
85. Розенблюм (M. Rosenblum)
Perturbation of the continuous spectrum and unitary equivalence, Pacif. J. Math. 7 (1957), 997—1010. (Сборник переводов «Математика» 3 : 3 (1959), 57—68.)
86. Сеге (G. Szego)
Orthogonal Polynomials, N. Y. 1939. Ортогональные многочлены, Физматгиз, 1962.
87. Сиерс (D. B. Sears)
Note on the uniqueness of Green's functions associated with certain differential equations, Canadian J. Math. 2 (1950), 314—325.
88. Сиерс и Титчмарш (D. B. Sears, E. Titchmarsh) Some eigenfunction formulae, Quart. J. Math. Oxford, Ser. 2, 1 (1950), 165—175.
89. Смирнов В. И.
Курс высшей математики, т. IV, Гостехиздат, 1951; т. V, Физматгиз, 1959.
90. Соболев С. Л.
1) Общая теория дифракции волн на римановых поверхностях, Тр. Ин-та им. Стеклова 9 (1935), 39—106.
2) Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Изд. ЛГУ, 1950.
91. Сретенский Л. Н.
Теория ньютоновского потенциала, Гостехиздат, 1945.
92. Стеклов В. А.
Один метод решения проблемы разложения функций в ряд по полиномам Чебышева, Изв. Рос. АН (1921), 281—302, 303—326.

93. Стернберг (R. Sternberg)
Variational methods and non-oscillation theorems for system of differential equations, *Duke Math. J.* **19** (1952), 311—322.
94. Стоун (M. H. Stone)
Linear Transformations in Hilbert Space and their Applications to Analysis, *Amer. Math. Soc. Colloq. Publ.* **15**, N. Y., 1932.
95. Титчмарш (E. C. Titchmarsh)
1) On the discreteness of the spectrum associated with certain differential equations, *Annali di Matematica (IV)* **28** (1949), 141—147.
2) Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, *ИЛ*, т. I, 1960; т. II, 1961.
96. Фок В. А.
Начала квантовой механики, КУБУЧ, 1934.
97. Фридрихс (K. O. Friedrichs)
1) Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, *Math. Ann.* **109** (1934), 465—487.
2) Über die Spektralzerlegung eines Integraloperators, *Math. Ann.* **115** (1938), 249—272.
3) Criteria for the discrete character of the spectra of the ordinary differential operators, *Studies and Essays presented to R. Courant*, N. Y. (1948), 145—160.
4) On the perturbation of continuous spectra, *Comm. pure and appl. math.* **1** (1948), 361—406.
98. Фробениус (G. Frobenius)
Die adjunquierten Differentialgleichungen, *Z. für Math.* **80** (1875).
99. Хайнц (E. Heinz)
Halbbeschränktheit gewöhnlicher Differentialoperatoren höherer Ordnung, *Math. Ann.* **135** (1958), 1—49.
100. Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.
Неравенства, *ИЛ*, 1948.
101. Хартман (P. Hartman)
On the spectra of slightly disturbed linear oscillators, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 71—79.
102. Хартман и Винтнер (P. Hartman, A. Wintner)
1) On the location of spectra of wave equations, *Amer. J. Math.* **71** (1949), 214—217.
2) On the derivatives of the solutions of one-dimensional wave equations, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 148—156.
103. Хартман и Патнам (P. Hartman, C. R. Patnam)
1) The least cluster point of the spectrum of boundary value problems, *Amer. J. Math.* **70** (1948), 849—855.
2) The gaps in the essential spectra of wave equations, *Amer. J. Math.* **72** (1950), 849—862.
104. Хаусдорф (F. Hausdorff)
Der Wertevorrat einer Bilinearform, *Math. Z.* **3** (1919), 314—316.
105. Хилле (E. Hille)
Non-oscillation theorems, *Trans. Amer. Math. Soc.* **64** (1948), 234—252.
106. Шиллов Г. Е.
Лекции по векторному анализу, Гостехиздат, 1954.

107. Широков П. А.
Тензорные исчисления, ч. I, ГИТТЛ, 1934.
108. Шноль И. Э.
1) Об ограниченных решениях уравнения второго порядка в частных производных, ДАН СССР 89 (1953), 411—413.
2) О поведении собственных функций, ДАН СССР 94 (1954), 389—392.
3) Поведение собственных функций и спектр операторов Штурма — Лиувилля, Успехи матем. наук 9, вып. 4 (62) (1954), 113—132.
4) О поведении собственных функций уравнения Шредингера, Матем. сборн. 42 (84) : 3 (1957), 273—286.
109. Шредингер (E. Schrödinger)
Quantisierung als Eigenwertproblem, Ann. d. Phys., Folge IV 79 (1929), 631—642, 489—527.
110. Эйдус Д. М.
О принципе предельного поглощения, ДАН СССР 125 (1959), 508—510.
111. Якубович В. А.
1) Осцилляционные свойства решений линейных канонических систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР 124 (1959), 533—536.
2) Условия колебательности и неколебательности для линейных канонических систем дифференциальных уравнений, ДАН СССР 124 (1959), 994—997.
3) Осцилляторные свойства решений канонических уравнений, Матем. сборн. 56 (98) : 1 (1962), 3—42.
-

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абсолютно непрерывная часть оператора A_c 22
 — — — спектра $S(A_c)$ 22
 Бесконечномерное расширение 23
 Внешнее дефектное число $\text{Def } T$ 121
 — поле регулярности $R(T)$ 121
 Возрастание монотонное в основном 58
 Двучленная дифференциальная операция 130
 Дефектное число подпространства $\text{Def } F$ 25
 — — J -симметрического оператора $\text{Def } A$ 123
 Дискретная компонента сингулярной части спектра 23
 Дискретность спектра левее данной точки 31
 Дискретный спектр (дискретная часть спектра $D(T)$) 18
 Диссипативный оператор 119
 Емкость множества 230
 Жесткое расширение $\tilde{A}$ 35
 Зона устойчивости (неустойчивости) 284
 Индуцированная краевая задача 231
 Квазидифференциальная операция 50
 Квазиконическая область 241
 Квазиограниченная область 241
 Квазицилиндрическая область 241
 Классы функций $C_k(\alpha, \beta)$, $\dot{C}_k(\alpha, \beta)$, $C_k[0, \infty)$ 49
 Конечномерное расширение 23
 — расщепление 24
 Конечность характеристики оператора 121
 Корневое многообразие (подпространство) 18
 Кратность собственного значения 18
 Лакуна непрерывной части спектра 30
 Метрика (A - и $A \sim$ метрики) 35
 Минимальный дифференциальный оператор L 50, 79
 — незамкнутый дифференциальный оператор $\dot{L}$ 50
 Множество $K(T)$ 119
 Мультипликатор 283
 Неосцилляторное уравнение (операция) 69, 74, 77, 239
 Неотрицательный оператор 34
 Непрерывная компонента сингулярной части спектра 23
 Непрерывный спектр (непрерывная часть спектра) $C(T)$ 18
 Несущественный вырез множества 230
 Неустойчивое значение параметра λ 283
 Нижняя грань оператора 34
 Нормированная последовательность 19

Носитель финитной функции 49, 79

Область определения оператора D_T 17

Одночленная дифференциальная операция 181

Оператор — $\tilde{\Delta}$ 253

J -самосопряженный 121

J -симметрический 121

Ортогональная сумма $\oplus$ 20

Ортогональное дополнение $\ominus$ 20

Остаточный спектр (остаточная часть спектра) $O(T)$ 19

Осцилляторное уравнение (операция) 69, 74, 76, 239

Отделимое корневое подпространство 18

Относительно полная непрерывность 35

Поверхность расщепления Γ 97

Поле регулярности $P(T)$ 17

Положительный оператор 34

Полуограниченный оператор 33

Полярная дифференциальная операция 145

Потенциал 78, 130

Потенциальная функция 79

Предельно-цилиндрическая область 253

Предельный спектр 19

Прямая сумма $+$ 20

Разделенные краевые условия 85

Ранг собственного значения 18

Расщепление 24

Регулярная дифференциальная операция 79

Регулярные (D -регулярные) краевые условия 85, 102, 108

Регулярный дифференциальный оператор 85

Резольвентное множество 17

Сингулярная дифференциальная операция 79

Сингулярная часть оператора A_D 22

— — спектра $S(A_D)$ 22

Сингулярные краевые условия 85

Сингулярный дифференциальный оператор 85

Собственное подпространство 18

Соотношение $\omega_1 \subset \omega_2$ 80

Сопряженные решения 213

Спектр $S(T)$ 17

— сгущения 19

Тип точки непрерывности спектра 29

Точка расщепления γ 51

— регулярного типа 17

— регулярности 17

Узловой контур 239

Устойчивое значение параметра λ 283

— (h -устойчивое) свойство спектра 131

Финитная деформация области 112

— (N -финитная) функция 49, 109

— функция в данной области 79

Финитный (N -финитный) вектор 75, 192

Характеристика оператора 121

Характеристическая последовательность элементов для $\lambda \in C(T)$ 119

— — — — $\lambda = -\infty$ 106

Характеристический показатель 283

Эвклидово пространство $\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_3 = \mathcal{E}$ 79

Эквивалентные краевые условия в бесконечности 86

Якобиева матрица (обобщенная) 323

Израиль Маркович Глазман

Прямые методы
качественного спектрального анализа
сингулярных дифференциальных операторов

М., Физматгиз, 1963 г., 340 стр.

Редактор А. А. Егоров.

Техн. редактор Н. Я. Мурашова.

Корректор М. Ф. Алексеева.

Сдано в набор 8/VII 1963 г.	Подписано
к печати 24/X 1963 г.	Бумага $84 \times 108^{1/32}$.
Физ. печ. л. 10,625.	Условн. печ. л. 17,43.
Уч.-изд. л. 17,53.	Тираж 6 500 экз. Т-13945.
Цена книги 1 р. 08 к.	Заказ № 1545.

Государственное издательство
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Типография № 2 им. Евг. Соколовой
УЦБ и ПП Ленсовнархоза.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

75

НОВАЯ
ЦЕНА Р. — К. 54

~~BOOK~~

ПРЕДМЕТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА